

АКАДЕМИЯ НАУК КАЗАХСКОЙ ССР  
ИНСТИТУТ СЕЙСМОЛОГИИ

Ж. С. ЕРЖАНОВ, Т. Д. КАРИМБАЕВ,  
Т. Б. БАЙТЕЛИЕВ

ДВУМЕРНЫЕ ВОЛНЫ  
НАПРЯЖЕНИЙ  
В ОДНОРОДНЫХ  
И СТРУКТУРНО-  
НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ



Издательство «НАУКА» Казахской ССР  
АЛМА-АТА · 1983

О т в е

член

Е  $\frac{20305-036}{407(05)-83}$  63.83.170304

© Издательство «Наука» К

ким-то образом определив в них неизвестные величины. Такая операция представляется несколько искусственной.

Метод расщеплений [44, 71] был применен к динамическим задачам теории упругости в работах [17, 32, 69]. В этом методе привлекательно уменьшение числа независимых переменных в уравнениях, к которым сводится исходная система.

В приложениях наиболее удобным представляется метод пространственных характеристик, облегчающий интерпретацию изучаемых физических явлений. Еще в 1960 г. была предложена численная схема решения гиперболической системы дифференциальных уравнений в частных производных относительно трех переменных [79], в последующем реализованная для исследования плоских упругих волн [30]. При этом динамические деформации описаны симметричной гиперболической системой дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. В качестве неизвестных взяты компоненты вектора скорости перемещения и линейная комбинация трех компонентов напряжений.

Решение смешанной задачи с начальными и граничными условиями для областей, составленных из прямоугольников, получено на основе интегрирования вдоль бихарактеристик. Эта разностная схема использована в дальнейшем для решения конкретных задач [2, 11, 55—57, 60, 61]. Применительно к осесимметричным задачам теории упругости она реализована авторами работ [56, 60].

Этим методом решена задача о распространении линейных упругих волн в однородной изотропной полуполосе при столкновении ее торца с абсолютно твердой преградой [61]. В работе [55] определены свойства характеристик системы линейных уравнений, описывающих развитие деформаций в пространстве трех измерений, и численный метод решения динамических задач теории упругости, относящихся к типу смешанной задачи с начальными и граничными условиями. Метод является обобщением упомянутого ранее метода приближенного интегрирования вдоль бихарактеристик на трехмерный случай.

В отличие от перечисленных работ метод пространственных характеристик [7, 11, 29, 35, 78, 81] предполагает использование метода итераций при построении решения задачи. Такой подход [78, 81, 82] распространен на решение плоской (в прямоугольной и полярной системах координат) и осесимметричной задач для упруго-вязкопластической среды. Так, в

работе [78] решена задача о действии неравномерного давления на неограниченное полупространство, изучен начальный этап распространения волн. В работе [31] исследовано распространение волн в упруго-вязкопластической среде в условиях температурного режима. Был предложен [35] метод, основанный на использовании уравнений упруго-вязкопластической среды в случае осевой симметрии, записанных в характеристической форме. В качестве примера рассмотрено распространение упруго-вязкопластических волн в толстостенной трубе конечной длины. На внутренней поверхности трубы создавалось неравномерное давление, внешняя поверхность была свободна от напряжений, начальное состояние принималось ненапряженным.

Приведенный обзор показывает, что методы решения двумерных задач динамики на данном этапе развития далеки от полного завершения. Сравнительно полно они проанализированы лишь для областей, составленных из прямоугольников [30, 61], цилиндров [11, 56, 60, 81] и для пространства [78], причем для достаточно гладко меняющихся граничных и начальных условий.

Несомненный интерес представляет обобщение метода пространственных характеристик в более сложных условиях. Имеются в виду задачи с разрывами в граничных условиях как в смешанных, так и в первой и во второй краевых задачах соответственно классификации [76]: для областей со скачкообразным изменением граничных поверхностей; с разрывными — в начальных условиях; о распространении волн в двухкомпонентных и нелинейных средах. Указанные вопросы явились предметом исследования настоящей работы.

Описан метод решения динамических задач плоской теории малых упругопластических деформаций. Он представляет собой обобщение разностного метода интегрирования вдоль бихарактеристик динамических задач плоской теории упругости [30] на нелинейные задачи, в котором реализуется итерация в соответствии с методом переменных параметров упругости [6]. Хотя метод реализован применительно к нелинейной среде, моделируемой теорией малых упругопластических деформаций, его легко распространить на активном участке деформирования на нелинейные среды, моделируемые другими теориями пластичности — ассоциированным законом течения [26, 49], и основанной на постулате изотропии [28],

а также на случай разгрузки и повторных нагружений тела.

Разработанный метод применен к решению конкретных задач о распространении возмущений в упругой и упруго-пластической средах. Расчетные соотношения на линейном участке (упругом) деформирования совпадают с равенствами, полученными в работе [30]. Здесь рассмотрен прямоугольник, на верхней части грани которого задана нагрузка, растущая пропорционально времени. Боковые грани прямоугольника закреплены, нижняя свободна от напряжений. Расчет ведется до моментов времени, когда в каждой точке напряжение растет (активная деформация). Построена траектория нагружения в пространстве напряжений. Реализуется процесс, близкий к простому [28, 41], что доказывает возможность применения деформационной теории к исследуемой задаче.

Изложенный подход позволил установить зависимость скорости распространения продольных и поперечных волн от уровня пластической деформации, что упускается при других методах решения [11, 35, 80]. Развитие метода в направлении, допускающем и разгрузку в каждой точке тела, позволит рекомендовать его для исследования широкого класса нелинейных динамических задач.

Далее рассмотрены задачи о распространении в упругом прямоугольнике возмущений, распределенных на части одной из граней по параболе и асимптотически приближающихся по времени к постоянной, и о поведении точек упругого полупространства, когда на его поверхности заданы движущиеся и неподвижные нагрузки. Использован метод сглаживания граничных возмущений, скачкообразно меняющихся по координате.

В связи с широким применением составных конструкций в последние годы возрос интерес к задачам динамического взаимодействия упругого слоя и упругого основания. Как дополнение к работам, выполненным в этом направлении [1, 12], исследована задача о распространении плоских упругих волн в составных телах — полосе прямоугольного сечения, лежащей на полупространстве из другого материала. Здесь, в частности, усовершенствована методика расчета в точках скачкообразного изменения контура граничной поверхности.

Рассматриваются задачи динамики двухкомпонентных сред, являющихся смесью двух изотропных твердых тел, твер-

дого тела и жидкости (или газа), двух жидкостей, жидкости и газа. Эти вопросы важны для расчета конструкций из композиционных материалов, составных конструкций, грунтовых оснований под сооружениями, в проблемах сейсмологии, акустики и т. д. При разработке метода решения двумерных динамических задач в таких структурно-неоднородных средах особое внимание обращено на реализацию решения для областей с криволинейными границами при действии разрывных по пространственным координатам или времени контурных условий. Подробно описана разработанная методика решения нестационарных задач для двухкомпонентных сред.

Для линейной (упругой) пористой двухкомпонентной среды наиболее общей формой уравнений, как показано в работе [34], можно считать уравнения, полученные М. А. Био. К сожалению, для большинства моделей многофазных структур не установлены физические константы. Лишь в работах [85, 86] определены упругие постоянные для песчаника с керосином, являющегося представителем двухкомпонентных сред. Найденные характеристики материала позволили приступить к решению ряда конкретных задач, имеющих непосредственное прикладное значение [4, 5, 18, 29, 34, 43, 46, 47, 68, 74—76, 88]. Так, на основе уравнений М. А. Био исследованы задачи об отражении и преломлении плоских монохроматических волн на границе раздела жидкости и пористого полупространства [34], об отражении плоских волн от свободной поверхности упруго-пористых сред, а также об ударе с постоянной скоростью четверти плоскости из упруго-пористого материала о жесткую преграду [29]. Решения некоторых задач выполнены при ряде упрощающих допущений. Например, обратное преобразование Лапласа проведено при наложении определенных условий на параметр, характеризующий вязкость жидкости, движущейся в порах среды [43].

В отличие от этих работ нами разработан численный метод расчета напряжений, деформаций, скоростей перемещений частиц двухкомпонентной среды при действии различного рода изменяющихся во времени возмущений. Он основан на использовании свойств дифференциальных уравнений, описывающих состояния точек двухкомпонентной среды, вдоль характеристических направлений характеристических поверхностей.

На основе разработанного метода решены конкретные

задачи. Прежде всего рассмотрена задача о внедрении жесткого штампа в упруго-пористое полупространство. Картина распределения возмущений в полупространстве позволила выявить качественные эффекты, присущие двухкомпонентным средам. Поставлена и решена задача для упруго-пористой среды, в которой граничные условия являются «разрывными» во времени. Исследована нестационарная динамическая задача для упруго-пористой полуполосы: в этой задаче подробно обсуждаются отличительные особенности характера распространения одномерных и двумерных волн.

Таким образом, разработанный разностный метод можно рекомендовать для решения плоских, осесимметричных и трехмерных динамических задач теории упруго-пористых сред.

Далее рассмотрена задача о напряженно-деформированном состоянии однонаправленно-армированной пластины при динамическом перемещении одной из ее сторон. Противоположная сторона пластины закреплена, а боковые свободны от действия напряжений. Результаты вычислений приведены в виде значений искомых функций в узловых точках в различные моменты времени. Наконец, дана постановка задачи об оптимизации технологического режима изготовления деталей из композиционных материалов. При решении этой задачи рекомендуется использовать разработанные методы решения нестационарных динамических задач.

## ГЛАВА I

### РАСПРОСТРАНЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В УПРУГИХ И НЕУПРУГИХ ОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Излагается обобщение разностного метода интегрирования вдоль бихарактеристик уравнений динамических задач плоской теории упругости, описанного в работе [30], на задачи плоской теории малых упругопластических деформаций. Для простоты предполагается, что распределенные на границе области нагрузки возрастают со временем так, что исключается возможность «разгрузки» во внутренних точках области, и всюду выполняются условия теоремы простого нагружения. В предлагаемом обобщении используется метод переменных параметров упругости [6]. Считается, что кривая деформирования материала тела задана.

#### 1. Разрешающие уравнения плоской динамической задачи деформационной теории пластичности

Основные положения теории малых упругопластических деформаций разработаны в [26]. Запишем рассматриваемые двумерные динамические состояния в прямоугольных координатах  $x_1, x_2$ . В случае плоской деформации упругопластического тела все его компоненты зависят только от  $x_1, x_2, t$ , как-то:

перемещения —

$$u_1 = u_1(x_1, x_2; t); u_2 = u_2(x_1, x_2; t); u_3 = 0; \quad (1.1)$$

кинематические соотношения —

$$e_{11} = u_{1,1} = e_{11}(x_1, x_2, t); \quad e_{22} = u_{2,2} = e_{22}(x_1, x_2, t); \quad (1.2)$$

$$e_{12} = u_{1,2} + u_{2,1} = e_{12}(x_1, x_2, t); \quad e_{33} = e_{13} = e_{23} = 0.$$

Компоненты тензора напряжений  $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ . Остальные его компоненты также являются функциями только  $x_1, x_2, t$  и связаны с компонентами тензора деформации (1.2) при активной деформации соотношениями [26, 27, 53]:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \left( K - \frac{2}{9} \frac{\sigma_i}{e_i} \right) \Theta + \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} e_{11}; \\ \sigma_{22} &= \left( K - \frac{2}{9} \frac{\sigma_i}{e_i} \right) \Theta + \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} e_{22}; \\ \sigma_{12} &= \frac{1}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} e_{12}; \quad \Theta = e_{11} + e_{22}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где интенсивности напряжений  $\sigma_i$  и деформаций  $e_i$  суть:

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6\sigma_{12}^2}; \\ e_i &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(e_{11} - e_{22})^2 + e_{11}^2 + e_{22}^2 + \frac{3}{2} e_{12}^2}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Компонента  $e_{33}$  тензора деформации состоит из упругой  $e'_{33}$  и пластической  $e''_{33}$  частей, выражаемых зависимостями  $e'_{33} = \frac{1}{E} [\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})]$ ,  $e''_{33} = \frac{\varphi(\sigma_i)}{3\mu} \left[ \sigma_{33} - \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \right]$ , где функция Генки  $\varphi(\sigma_i)$ , аналогичная функции Ильюшина  $\omega(e_i)$ , имеет выражение

$$\varphi(\sigma_i) = \frac{3\mu e_i - \sigma_i}{\sigma_i} = \frac{\omega(e_i)}{1 - \omega(e_i)}.$$

Из условия  $e_{33} = e'_{33} + e''_{33} = 0$  имеем

$$\sigma_{33} = \frac{1 + \left( \frac{2\nu}{E} - \frac{1}{3\mu} \right) \frac{\sigma_i}{e_i}}{2 \left[ 1 + \left( \frac{1}{E} - \frac{1}{3\mu} \right) \frac{\sigma_i}{e_i} \right]} (\sigma_{11} + \sigma_{22}). \quad (1.5)$$

В случае плоской деформации уравнения движения при отсутствии объемных сил имеют вид

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}; \quad (1.6)$$

$$\sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} = \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}.$$

Следуя работе [30], введем безразмерные независимые переменные и искомые величины:

$$\bar{x}_1 = \frac{x_1}{b}; \quad \bar{x}_2 = \frac{x_2}{b}; \quad \bar{x}_3 = \frac{x_3}{b}; \quad \bar{t} = \frac{tc_1}{b}; \quad u_1^* = \frac{u_1}{b}; \quad u_2^* = \frac{u_2}{b};$$

$$v_1 = \frac{1}{c_1} \frac{\partial u_1}{\partial t}; \quad v_2 = \frac{1}{c_1} \frac{\partial u_2}{\partial t}; \quad p = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2\rho c_1^2}; \quad q = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2\rho c_1^2}; \quad (1.7)$$

$$\tau = \frac{\sigma_{12}}{\rho c_1^2}; \quad \sigma = \frac{\sigma_{33}}{\rho c_1^2}; \quad \bar{\sigma}_i = \frac{\sigma_i}{\rho c_1^2},$$

где  $b$  — характерная длина;  $t$  — время;  $c_1$  — характерная скорость распространения волн, в качестве которой принята скорость упругих волн расширения  $c_1 = \sqrt{\frac{3K + 4\mu}{3\rho}}$ . В дальнейшем черта над буквами опускается. Дифференцируя зависимости (1.3) по времени, складывая и вычитая нормальные напряжения  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{22}$ , записываем уравнения движения и физические соотношения в виде системы для скоростей  $v_1, v_2$  и трех линейных комбинаций компонент тензора напряжений  $p, q, \tau$ :

$$v_{1,t} - p_{,1} - q_{,1} - \tau_{,2} = 0; \quad v_{2,t} - p_{,2} + q_{,2} - \tau_{,1} = 0;$$

$$\frac{\gamma^2}{\gamma_i^2 - 1} p_{,t} - v_{1,1} - \tau_{2,2} = \frac{1}{9} \frac{\gamma^2}{\gamma_i^2 - 1} (u_{1,1}^* + u_{2,2}^*) \left( \frac{\sigma_i}{e_i} \right)_{,t}; \quad (1.8)$$

$$\gamma^2 q_{,t} - v_{1,1} + v_{2,2} = \frac{1}{3} \gamma^2 (u_{1,1}^* - u_{2,2}^*) \left( \frac{\sigma_i}{e_i} \right)_{,t};$$

$$\gamma^2 \tau_{,t} - v_{1,2} - v_{2,1} = \frac{1}{3} \gamma^2 (u_{1,2}^* + u_{2,1}^*) \left( \frac{\sigma_i}{e_i} \right)_{,t},$$

в которых введены обозначения

$$\gamma = \frac{c_1}{c_2^*}; \gamma_i = \frac{c_1^*}{c_2^*}; c_1^* = \sqrt{\frac{\lambda_i + 2\mu_i}{\rho}}; c_2^* = \sqrt{\frac{\mu_i}{\rho}};$$

$$\lambda_i = K - \frac{2}{9} c_1^2 \frac{\sigma_i}{e_i}; \mu_i = \frac{1}{3} c_1^2 \frac{\sigma_i}{e_i}.$$

Индексами 1 и 2 обозначены переменные  $x_1$  и  $x_2$  соответственно. Запятая обозначает частную производную по переменной, указанной после запятой.

Если компоненты деформаций  $u_{1,1}^* + u_{2,2}^*$ ,  $u_{1,1}^* - u_{2,2}^*$ ,  $u_{1,2}^* + u_{2,1}^*$  определить из уравнений состояния через безразмерные величины  $p$ ,  $q$ ,  $\tau$ , то система уравнений (1.8) преобразуется к виду

$$v_{1,t} - p_{,1} - q_{,1} - \tau_{,2} = 0;$$

$$v_{2,t} - p_{,2} + q_{,2} - \tau_{,1} = 0;$$

$$\frac{\gamma^2}{\gamma_i^2 - 1} p_{,t} - v_{1,1} - v_{2,2} = \frac{1}{9} \left( \frac{\gamma^2}{\gamma_i^2 - 1} \right)^2 p \left( \frac{\sigma_i}{e_i} \right)_{,t}; \quad (1.9)$$

$$\gamma^2 q_{,t} - v_{1,1} + v_{2,2} = \frac{1}{3} \gamma^4 q \left( \frac{\sigma_i}{e_i} \right)_{,t};$$

$$\gamma^2 \tau_{,t} - v_{1,2} - v_{2,1} = \frac{1}{3} \gamma^4 \tau \left( \frac{\sigma_i}{e_i} \right)_{,t}.$$

Левые части полученной системы отличаются от соответствующих выражений для упругих деформаций [30] лишь по форме, ибо соотношения (1.9) содержат параметры  $\gamma$  и  $\gamma_i$ , зависящие от уровня достигнутой пластической деформации в рассматриваемой точке. Кроме того, эти соотношения содержат члены, характеризующие упрочнение материала при пластических деформациях; они выделены в правых частях.

Необходимо знать, что при  $\frac{\sigma_i}{e_i} = \frac{3\mu}{\rho c_1^2}$  система (1.9) совпадает с уравнениями, описывающими волновые процессы в линей-

ной упругой среде [30], поэтому все соотношения, выводимые далее из уравнения (1.9), справедливы при указанном условии и для упругих задач.

Представим разрешающие уравнения относительно вектора неизвестных величин  $W = W(v_1, v_2, p, q, \tau)$  в матричной форме:

$$L(W) = A^t W_{,t} + A^1 W_{,1} + A^2 W_{,2} - B = 0, \quad (1.10)$$

где

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\gamma^2}{\gamma_i^2 - 1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma^2 \end{bmatrix}; \quad A^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (1.11)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{9} \left( \frac{\gamma^2}{\gamma_i^2 - 1} \right)^2 p \left( \frac{\sigma_i}{e_i} \right)_{,t} \\ \frac{1}{3} \gamma^4 q \left( \frac{\sigma_i}{e_i} \right)_{,t} \\ \frac{1}{3} \gamma^4 \tau \left( \frac{\sigma_i}{e_i} \right)_{,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ R_1 p \\ R_2 q \\ R_3 \tau \end{bmatrix}.$$





опускается перпендикуляр на ось  $e_i$ , который обязательно пересечет заданную кривую деформирования в точке  $A$ . Последняя имеет координаты  $(\sigma_i^A, e_i^0)$ . Тогда отношение  $\frac{\sigma_i^A}{e_i^0}$  опре-

делит новый модуль «упругости» (секущий модуль  $E_c$ ), который и закладывается в расчет для рассматриваемого слоя по времени при уточнении полученного выше решения. Описанная итерация продолжается до тех пор, пока в каждой точке исследуемого по времени слоя значения интенсивности напряжения будут принадлежать с заданной точностью кривой деформирования.

Таким образом, в каждом приближении и на каждом слое по времени решается упругая задача с уточненными характеристиками материала. Каждый раз приходится решать линейную неоднородную гиперболическую систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Неоднородность определяется содержанием в матрице  $\mathbf{B}$  компонентов напряжений  $p, q, \tau$  при известном отношении  $\frac{\sigma_i}{e_i}$ .

В сколь угодно малой окрестности каждой точки рассматриваемого слоя система (1.10) линейна, ибо элементы матрицы  $\mathbf{A}^t$  постоянны при известном отношении  $\frac{\sigma_i}{e_i}$ . Уравнения систем характеристических поверхностей можно записать:

$$\Phi(x_1, x_2; t) = \text{const.} \quad (1.15)$$

Условие, при котором поверхность (1.15) будет характеристической поверхностью уравнения (1.10), есть равенство нулю определителя характеристической матрицы  $\mathbf{A}$ , т. е.

$$\det \mathbf{A} = 0. \quad (1.16)$$

Здесь

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^t \Phi_{,t} + \mathbf{A}^1 \Phi_{,1} + \mathbf{A}^2 \Phi_{,2} \quad (1.17)$$

или

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \Phi_{,t} & 0 & -\Phi_{,1} & -\Phi_{,1} & -\Phi_{,2} \\ 0 & \Phi_{,t} & -\Phi_{,2} & \Phi_{,2} & -\Phi_{,1} \\ -\Phi_{,1} & -\Phi_{,2} & \frac{\gamma^2}{\gamma^2-1} \Phi_{,t} & 0 & 0 \\ -\Phi_{,1} & \Phi_{,2} & 0 & \gamma^2 & 0 \\ -\Phi_{,2} & -\Phi_{,1} & 0 & 0 & \gamma^2 \end{bmatrix}$$

Решение уравнения (1.16), преобразованного к виду

$$\left[ \Phi_{,t}^2 - \frac{1}{\gamma^2} (\Phi_{,1}^2 + \Phi_{,2}^2) \right] \left[ \Phi_{,t}^2 - \left( \frac{\gamma_i}{\gamma} \right)^2 (\Phi_{,1}^2 + \Phi_{,2}^2) \right] \Phi_{,t} = 0, \quad (1.18)$$

относительно скалярной функции  $\Phi_{,t}$  дает пять действительных корней:

$$\Phi_{,t} = -c \sqrt{\Phi_{,1}^2 + \Phi_{,2}^2}; \quad c = \pm \frac{\gamma_i}{\gamma}; \quad \frac{1}{\gamma}; \quad 0. \quad (1.19)$$

Представив формулу (1.19) в виде  $c = -\frac{\Phi_{,t}}{\sqrt{\Phi_{,1}^2 + \Phi_{,2}^2}}$ , вели-

чину  $c$  можно интерпретировать как скорость распространения характеристических поверхностей в двумерном пространстве  $(x_1, x_2)$ .

Характеристическим поверхностям, распространяющимся со скоростью  $c = \pm \frac{\gamma_i}{\gamma}, \pm \frac{1}{\gamma}$ , соответствуют два характеристических конуса, уравнение которых имеет вид

$$(x_1 - x_{01})^2 + (x_2 - x_{02})^2 - c^2 (t - t_0)^2 = 0, \quad (1.20)$$

где  $(x_{01}, x_{02}; t_0)$  — вершина конуса. Уравнению (1.20) соответствуют конусы нормалей

$$\varphi_{,t}^2 - c^2 (\varphi_{,1}^2 + \varphi_{,2}^2) = 0, \quad (1.21)$$

где  $\varphi_{,v} = \beta \Phi_{,v}$  ( $v=1, 2, t$ );  $\beta$  — коэффициент пропорциональности.

При  $c=0$  характеристическая поверхность вырождается в ось конуса

$$x_1 = x_{01}; \quad x_2 = x_{02}, \quad (1.22)$$

а конус нормали — в плоскость, описываемую уравнением  $\varphi_{,t} = \text{const.}$

Таким образом, уравнение (1.18) определяет два семейства круговых конусов, тангенсы углов полураствора которых с

осью  $t$  равны  $\frac{\gamma_i}{\gamma}$  и  $\frac{1}{\gamma}$  соответственно. В отличие от упругих задач угол раствора конусов изменяется при переходе от точки  $(x_1, x_2; t)$  к точкам  $(x_1+i\Delta x_1, x_2+j\Delta x_2; t)$  и  $(x_1, x_2; t+\Delta t)$ , а ось конусов, определенная равенством  $\varphi_{,t}=0$ , постоянна во времени. Геометрия конусов и характер их изменения по пространственным координатам и времени показаны на рис. 2.

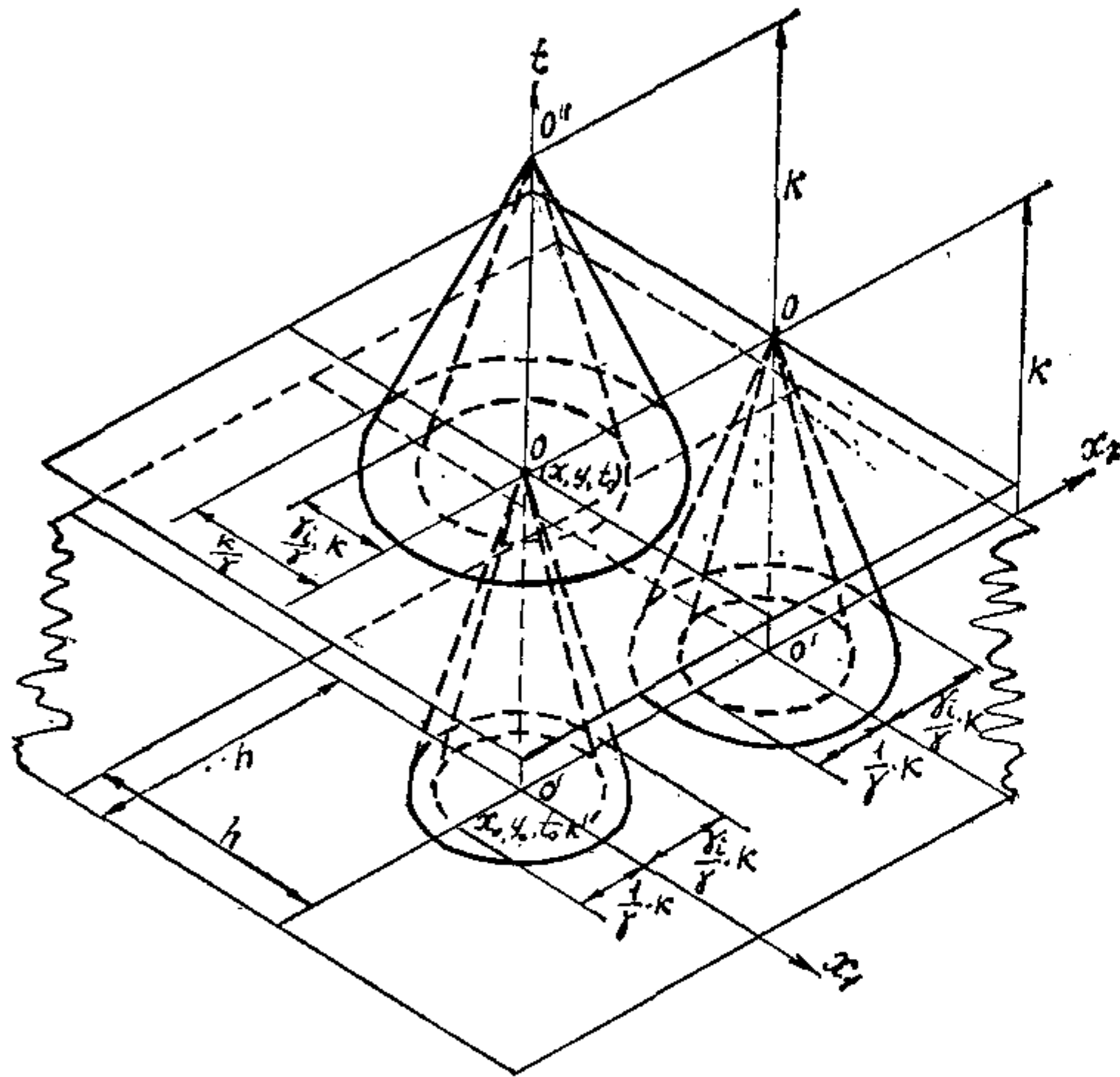


Рис. 2. Характеристические конусы для динамических уравнений упруго-пластической теории

При параметрическом представлении уравнений (1.18), когда за параметр принимается угол  $\alpha$ ,  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ , характеристические конусы для семейства плоскостей (1.19) принимают вид

$$x_1 - x_{01} = \pm cT \cos \alpha;$$

$$x_2 - x_{02} = \pm cT \sin \alpha; \quad (1.23)$$

$$c = \frac{\gamma_i}{\gamma}, \frac{1}{\gamma}; \quad t - t_0 = T,$$

а соответствующие конусы нормалей —

$$\varphi_{,1} = T \cos \alpha; \quad \hat{\varphi}_{,2} = T \sin \alpha; \quad \varphi_{,t} = \mp cT.$$

При каждом фиксированном  $\alpha$  уравнение (1.23) определяет соответствующее положение бихарактеристик. В дальнейших преобразованиях используются бихарактеристики, определяемые уравнениями

$$\begin{aligned} x_1 - x_{01} &= c(t - t_0) \cos \alpha; \\ x_2 - x_{02} &= c(t - t_0) \sin \alpha; \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$c = \frac{\gamma_i}{\gamma}, \frac{1}{\gamma}$$

и являющимися образующими характеристических конусов (см. рис. 2). Здесь параметр  $\alpha$  — угол в плоскости  $t_0 = \text{const.}$

### 3. Дифференциальные соотношения вдоль бихарактеристик

Чтобы найти характеристические соотношения уравнений (1.10) для упруго-пластических деформаций, требуется определить левые нуль-векторы  $l^{(i)}$  матрицы (1.17), соответствующие каждому конусу. Они определяются из уравнения

$$l^{(i)} A = 0 \quad (1.25)$$

и имеют следующий вид для  $c = \frac{\gamma_i}{\gamma}$ :

$$l^{(i)} = \begin{bmatrix} -\gamma \gamma_i \cos \alpha \\ -\gamma \gamma_i \sin \alpha \\ \gamma_i^2 - 1 \\ \cos 2\alpha \\ \sin 2\alpha \end{bmatrix};$$

для  $c = \frac{1}{\gamma}$ :

$$I^{(2)} = \begin{bmatrix} \gamma \sin \alpha \\ -\gamma \cos \alpha \\ 0 \\ -\sin 2\alpha \\ \cos 2\alpha \end{bmatrix}. \quad (1.26)$$

Характеристические соотношения, используемые в численном методе решения, для  $i$ -го конуса могут быть получены из условия

$$I^{(i)} \cdot L(W) = 0. \quad (1.27)$$

Здесь точка обозначает скалярное произведение. В уравнение (1.27) не входит производная по направлению нормали к поверхности (1.15), следовательно, в каждой точке оно может быть выражено производными в двух направлениях на этой поверхности.

Дифференциальные операторы вдоль бихарактеристики таковы:

$$\frac{d(\dots)}{dt} = (\dots)_{,t} + (\dots)_{,1} \frac{dx_1}{dt} + (\dots)_{,2} \frac{dx_2}{dt}, \quad (1.28)$$

где производные  $\frac{dx_1}{dt}$ ,  $\frac{dx_2}{dt}$  вдоль бихарактеристик должны получаться дифференцированием уравнений (1.24). Если исключить, используя уравнение (1.28), частные производные по  $t$ , то уравнение (1.27) будет содержать производные вдоль бихарактеристик и производные в плоскостях  $t_0 = \text{const}$ . И тогда это уравнение можно рассматривать как дифференциальное соотношение вдоль бихарактеристик.

Прежде чем выполнить эту процедуру, отметим, что при численном интегрировании необходимо получить дифференциальное соотношение вдоль обратных направленных бихарактеристик. В рассматриваемом случае это достигается заменой  $\alpha$  на  $\alpha + \pi$ .

Теперь соотношение (1.27) вдоль производных бихарактеристик можно записать в следующем виде для  $c = \frac{1}{\gamma}$ :

$$\begin{aligned} \cos \alpha dv_1 + \sin \alpha dv_2 + \frac{\gamma}{\gamma_i} dp + \frac{\gamma}{\gamma_i} \cos 2\alpha dq + \\ + \frac{\gamma}{\gamma_i} \sin 2\alpha d\tau = -S_1(\alpha) dt \end{aligned} \quad (1.29)$$

и для  $c = \frac{1}{\gamma}$ :

$$-\gamma \sin \alpha dv_1 + \gamma \cos \alpha dv_2 - \gamma^2 \sin 2\alpha dq + \gamma^2 \cos 2\alpha d\tau = -S_2(\alpha) dt.$$

Здесь, например,  $dv_1$  означает приращение скорости перемещения  $v_1$  вдоль бихарактеристики за время  $dt$ ; кроме того, обозначено:

$$\begin{aligned} S_1(\alpha) = & (\cos 2\alpha - 1) \cos \alpha q_{,1} + (\cos 2\alpha + 1) \sin \alpha q_{,2} + \\ & + (\sin 2\alpha \sin \alpha - \cos \alpha) \tau_{,2} + (\sin 2\alpha \cos \alpha - \sin \alpha) \tau_{,1} - \\ & - \frac{\gamma_i}{\gamma} \sin^2 \alpha v_{1,1} + \frac{1 - \cos 2\alpha}{\gamma \gamma_i} v_{1,1} - \frac{\gamma_i}{\gamma} \cos^2 \alpha v_{2,2} + \frac{1 + \cos 2\alpha}{\gamma \gamma_i} v_{2,2} + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\gamma_i}{\gamma} \sin 2\alpha (v_{1,2} + v_{2,1}) - \frac{\sin 2\alpha}{\gamma \gamma_i} (v_{1,2} + v_{2,1}) - \\ & - \frac{\gamma_i^2 - 1}{\gamma \gamma_i} R_1 p - \frac{\cos 2\alpha}{\gamma \gamma_i} R_2 q - \frac{\sin 2\alpha}{\gamma \gamma_i} R_3 \tau; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2(\alpha) = & \gamma (\sin \alpha - \sin 2\alpha \cos \alpha) q_{,1} + \gamma (\cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha) q_{,2} + \\ & + \gamma \sin \alpha p_{,1} - \gamma \cos \alpha p_{,2} + \gamma (1 + \cos 2\alpha) \sin \alpha \tau_{,2} - \\ & - \gamma (1 - \cos 2\alpha) \cos \alpha \tau_{,1} + \frac{1}{2} \sin 2\alpha (v_{1,1} - v_{2,2}) - \cos^2 \alpha v_{1,2} + \\ & + \sin^2 \alpha v_{2,1} - \sin 2\alpha R_2 q + \cos 2\alpha R_3 \tau. \end{aligned}$$

#### 4. Вывод разрешающих разностных уравнений

Разностные уравнения, из которых определяются искомые величины  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $\tau$  в точке  $0(x_1^0, x_2^0; t_0)$  (см. рис. 2), при известных данных в точках предыдущей плоскости  $t = t_0 - k$  ( $k = \Delta t$  — шаг по времени) получаются из анализа ре-

результатов интегрирования соотношения (1.29) и интегрирования основного уравнения (1.9) вдоль оси конуса (1.22).

Само интегрирование соотношения на характеристических поверхностях (1.29) вдоль произвольной бихарактеристики (положение бихарактеристики определяется заданием значения  $\alpha$ , например,  $\alpha = \alpha_j$ ) с учетом того, что коэффициенты при приращениях и правых частях приняты как некоторые средние их значения в пределах интервалов интегрирования, приводят к выражениям:

для внешнего конуса ( $c = \frac{\gamma_i}{\gamma}$ ):

$$\begin{aligned} & \cos \alpha_j \delta v_1 + \sin \alpha_j \delta v_2 + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\gamma}{\gamma_i} \right)^0 + \left( \frac{\gamma}{\gamma_i} \right)_j \right] (\delta p + \\ & + \cos 2\alpha_j \delta q + \sin 2\alpha_j \delta \tau) = - \frac{k}{2} [(S_1(\alpha_j))_j + (S_1(\alpha_j))^0] + \\ & + (W_1(\alpha_j))_j - (W_1(\alpha_j))' + 0(k^3), \end{aligned} \quad (1.30)$$

для внутреннего конуса ( $c = \frac{1}{\gamma}$ ):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [(\gamma)^0 + (\gamma)_j] (\cos \alpha_j \delta v_2 - \sin \alpha_j \delta v_1) + \frac{1}{2} [(\gamma^2)^0 + \\ & + (\gamma^2)_j] (\cos 2\alpha_j \delta \tau - \sin 2\alpha_j \delta q) = \\ & = - \frac{k}{2} [(S_2(\alpha_j))_j + (S_2(\alpha_j))^0] + (W_2(\alpha_j))_j - (W_2(\alpha_j))' + 0(k^3). \end{aligned}$$

Здесь, например,  $\delta v_1$  означает приращение  $v_1(x_1^0, x_2^0; t_0) - v_1(x_1^0, x_2^0; t_0 - k)$  и обозначено:

$$\begin{aligned} W_1(\alpha_j) &= \cos \alpha_j v_1 + \sin \alpha_j v_2 + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\gamma}{\gamma_i} \right)^0 + \right. \\ & \left. + \left( \frac{\gamma}{\gamma_i} \right)_j \right] (p + \cos 2\alpha_j q + \sin 2\alpha_j \tau); \\ W_2(\alpha_j) &= \frac{1}{2} [(\gamma)^0 - (\gamma)_j] (\cos \alpha_j v_2 - \sin \alpha_j v_1) + \\ & + \frac{1}{2} [(\gamma^2)^0 + (\gamma^2)_j] (\cos 2\alpha_j \tau - \sin 2\alpha_j q). \end{aligned}$$

Нижний индекс  $j$  функций в уравнениях (1.30) означает, что эта функция берется в точке, где бихарактеристика, для которой  $\alpha = \alpha_j$ , лежит на внешнем и внутреннем конусах соответственно, пересекая плоскость  $t = t_0 - k$ . Индексы 0 и штрих,  $(\dots)^0$  и  $(\dots)'$ , означают, что функция берется в точках  $(x_1^0, x_2^0; t_0)$  и  $(x_1^0, x_2^0; t_0 - k)$  соответственно.

Интегрирование уравнения (1.9) вдоль линии (1.22) от точки  $t = t_0 - k$  позволяет написать дополнительные уравнения относительно приращений  $\delta v_1, \delta v_2, \delta p, \delta q, \delta \tau$  вида:

$$\begin{aligned} \delta v_1 &= \frac{k}{2} [(p_{.1} + q_{.1} + \tau_{.2})^0 + (p_{.1} + q_{.1} + \tau_{.2})'] + 0(k^3); \\ \delta v_2 &= \frac{k}{2} [(p_{.2} - q_{.2} + \tau_{.1})^0 + (p_{.2} - q_{.2} + \tau_{.1})'] + 0(k^3); \\ \left[ \left( \frac{\gamma^3}{\gamma_i^3 - 1} \right)^0 + \left( \frac{\gamma^3}{\gamma_i^3 - 1} \right)' \right] \delta p &= k [(v_{1.1} + v_{2.2})^0 + (v_{1.1} + v_{2.2})' + \\ & + (R_{1p})^0 + (R_{1p})'] + 0(k^3); \\ [(\gamma^2)^0 + (\gamma^2)'] \delta q &= k [(v_{1.1} - v_{2.2})^0 + (v_{1.1} - v_{2.2})' + \\ & + (R_{2q})^0 + (R_{2q})'] + 0(k^3); \\ [(\gamma^2)^0 + (\gamma^2)'] \delta \tau &= k [(v_{1.2} + v_{2.1})^0 + (v_{1.2} + v_{2.1})' + \\ & + (R_{3\tau})^0 + (R_{3\tau})'] + 0(k^3), \end{aligned} \quad (1.31)$$

где индексы 0 и штрих означают то же, что и в уравнениях (1.30).

Важно отметить, что в правой части уравнений (1.30) и (1.31) содержатся неизвестные производные по координатам  $x_1, x_2$  от искомого значения функции на слое  $t = t_0$ , которые не могут быть вычислены из данных на плоскости  $t = t_0 - k$ . Следуя приему, осуществленному для прямоугольных областей изотропного однородного тела [30], указанные производные (соответствующие слагаемые) исключаются путем линейной комбинации соотношений (1.30) и (1.31). Процедура исключения неизвестных производных, содержащихся на слое  $t = t_0$  различна для внутренних, граничных и угловых точек исследуемой области.

Разрешающие уравнения для внутренних точек области. Порядок получения разностной схемы, пригодной для использования ЭВМ, следующий.

Соотношения (1.30), отвечающие значениям параметра  $\alpha = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ , имеют вид:

$$\begin{aligned} \delta v_1 + \left[ \frac{\gamma}{\gamma_i} \right]_{01}^a \delta p + \left[ \frac{\gamma}{\gamma_i} \right]_{01}^a \delta q &= a_1 - \frac{k}{2} (S_1(0))^0; \\ \delta v_2 + \left[ \frac{\gamma}{\gamma_i} \right]_{02}^a \delta p - \left[ \frac{\gamma}{\gamma_i} \right]_{02}^a \delta q &= a_2 - \frac{k}{2} \left( S_1\left(\frac{\pi}{2}\right) \right)^0; \\ -\delta v_1 + \left[ \frac{\gamma}{\gamma_i} \right]_{03}^a \delta p + \left[ \frac{\gamma}{\gamma_i} \right]_{03}^a \delta q &= a_3 - \frac{k}{2} (S_1(\pi))^0; \\ -\delta v_2 + \left[ \frac{\gamma}{\gamma_i} \right]_{04}^a \delta p - \left[ \frac{\gamma}{\gamma_i} \right]_{04}^a \delta q &= a_4 - \frac{k}{2} \left( S_1\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right)^0 \end{aligned} \quad (1.32)$$

для внешнего конуса и

$$\begin{aligned} [\gamma]_{01}^b \delta v_2 + [\gamma^2]_{01}^b \delta \tau &= b_1 - \frac{k}{2} (S_2(0))^0; \\ -[\gamma]_{02}^b \delta v_1 - [\gamma^2]_{02}^b \delta \tau &= b_2 - \frac{k}{2} \left( S_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \right)^0; \\ -[\gamma]_{03}^b \delta v_2 + [\gamma^2]_{03}^b \delta \tau &= b_3 - \frac{k}{2} (S_2(\pi))^0; \\ [\gamma]_{04}^b \delta v_1 - [\gamma^2]_{04}^b \delta \tau &= b_4 - \frac{k}{2} \left( S_2\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right)^0 \end{aligned} \quad (1.33)$$

для внутреннего конуса соответственно.

Здесь обозначено

$$[\dots]_{0j}^s = \frac{1}{2} [(\dots)^0 + (\dots)_j^s]; \quad s = a, b; \quad j = \overline{1,4};$$

$(\dots)_j^a$  и  $(\dots)_j^b$  соответствуют значениям функции в точках, где бихарактеристики внешнего и внутреннего конусов соответственно пересекают плоскость начальных данных  $t = t_0 - k$ ;

$$a_j = -\frac{k}{2} (S_1(\alpha_j))_j - (W_1(\alpha_j))' + (W_1(\alpha_j))_j;$$

$$b_j = -\frac{k}{2} (S_2(\alpha_j))_j - (W_2(\alpha_j))' + (W_2(\alpha_j))_j; \quad \alpha_j = (j-1) \frac{\pi}{2}, \quad j = \overline{1,4};$$

$$\begin{aligned} (S_1(0))^0 &= -(\tau, 2)^0 - \left( \frac{\gamma_i}{\gamma} - \frac{2}{\gamma \gamma_i} \right)^0 (v_{2,2})^0 - \left( \frac{\gamma_i^2 - 1}{\gamma \gamma_i} \right)^0 (R_1 p)^0 - \\ &\quad - \left( \frac{1}{\gamma \gamma_i} \right)^0 (R_2 q)^0; \\ \left( S_1\left(\frac{\pi}{2}\right) \right)^0 &= -(\tau, 1)^0 - \left( \frac{\gamma_i}{\gamma} - \frac{2}{\gamma \gamma_i} \right)^0 (v_{1,1})^0 - \left( \frac{\gamma_i^2 - 1}{\gamma \gamma_i} \right)^0 (R_1 p)^0 + \\ &\quad + \left( \frac{1}{\gamma \gamma_i} \right)^0 (R_2 q)^0; \\ (S_1(\pi))^0 &= (\tau, 2)^0 - \left( \frac{\gamma_i}{\gamma} - \frac{2}{\gamma \gamma_i} \right)^0 (v_{2,2})^0 - \left( \frac{\gamma_i^2 - 1}{\gamma \gamma_i} \right)^0 (R_1 p)^0 - \\ &\quad - \left( \frac{1}{\gamma \gamma_i} \right)^0 (R_2 q)^0; \\ \left( S_1\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right)^0 &= (\tau, 1)^0 - \left( \frac{\gamma_i}{\gamma} - \frac{2}{\gamma \gamma_i} \right)^0 (v_{1,1})^0 - \left( \frac{\gamma_i^2 - 1}{\gamma \gamma_i} \right)^0 (R_1 p)^0 + \\ &\quad + \left( \frac{1}{\gamma \gamma_i} \right)^0 (R_2 q)^0; \\ (S_2(0))^0 &= (\gamma)^0 (q, 2)^0 - (\gamma)^0 (p, 2)^0 - (v_{1,2})^0 + (R_3 \tau)^0; \\ \left( S_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \right)^0 &= (\gamma)^0 (q, 1)^0 + (\gamma)^0 (p, 1)^0 + (v_{2,1})^0 - (R_3 \tau)^0; \\ (S_2(\pi))^0 &= -(\gamma)^0 (q, 2)^0 + (\gamma)^0 (p, 2)^0 - (v_{1,2})^0 + (R_3 \tau)^0; \\ \left( S_2\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right)^0 &= -(\gamma)^0 (q, 1)^0 - (\gamma)^0 (p, 1)^0 + (v_{2,1})^0 - (R_3 \tau)^0. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Из первого и третьего соотношений в (1.32) следует, что

$$2\delta v_1 + \left( \left[ \frac{\gamma}{\gamma_i} \right]_{01}^a - \left[ \frac{\gamma}{\gamma_i} \right]_{03}^a \right) \delta p +$$

$$+\left(\left[\frac{\gamma}{\gamma_i}\right]_{01}^a - \left[\frac{\gamma}{\gamma_i}\right]_{03}^a\right)\delta q = a_1 - a_3 + k(\tau, 2)^0; \quad (1.35)$$

из второго и четвертого в (1.33) —

$$\begin{aligned} -2\delta v_1 - \frac{[\gamma^2]_{02}^b - [\gamma^2]_{01}^b}{\frac{1}{2}([\gamma]_{02}^b + [\gamma]_{01}^b)} \delta \tau = \frac{1}{\frac{1}{2}([\gamma]_{02}^b + [\gamma]_{01}^b)} (b_2 - b_4) - \\ - \frac{k(\gamma)^0}{\frac{1}{2}([\gamma]_{02}^b - [\gamma]_{01}^b)} (p, 1 + q, 1)^0. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Используя второе и третье соотношения в (1.33) и первое в (1.31), получим уравнение, в котором не содержатся производные искомых функций по координатам в точке  $(x_1^0, x_2^0; t_0)$  т. е.

$$\begin{aligned} 2\delta v_1 + \frac{(\gamma)^0 \left( \left[\frac{\gamma}{\gamma_i}\right]_{01}^a - \left[\frac{\gamma}{\gamma_i}\right]_{03}^a \right)}{\frac{1}{2}([\gamma]_{02}^b + [\gamma]_{01}^b)} (\delta p + \delta q) + \\ + \frac{[\gamma^2]_{02}^b - [\gamma^2]_{01}^b}{\frac{1}{2}([\gamma]_{02}^b + [\gamma]_{01}^b)} \delta \tau = \frac{(\gamma)^0}{\frac{1}{2}([\gamma]_{02}^b + [\gamma]_{01}^b)} (a_1 - a_3) - \\ - \frac{1}{\frac{1}{2}([\gamma]_{02}^b + [\gamma]_{01}^b)} (b_2 - b_4) - \frac{k(\gamma)^0}{\frac{1}{2}([\gamma]_{02}^b + [\gamma]_{01}^b)} (p, 1 + q, 1 + \tau, 2)^0. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Аналогично исключаются производные из других уравнений типа (1.31) — (1.33). В результате разностная система уравнений для определения искомых функций в точке  $0(x_1^0, x_2^0; t_0)$  принимает вид

$$\sum_{n=1}^5 \Gamma_{mn} \delta f_n = T_m; \quad (m = \overline{1, 5}), \quad (1.38)$$

где

$$f_1 = v_1; f_2 = v_2; f_3 = p; f_4 = q; f_5 = \tau;$$

$$\Gamma_{11} = [\gamma]_{02}^b + [\gamma]_{01}^b; \Gamma_{12} = 0; \Gamma_{13} = (\gamma)^0 \left( \left[\frac{\gamma}{\gamma_i}\right]_{01}^a - \left[\frac{\gamma}{\gamma_i}\right]_{03}^a \right); \Gamma_{14} = \Gamma_{13};$$

$$\Gamma_{15} = [\gamma^2]_{02}^b - [\gamma^2]_{01}^b; \Gamma_{21} = 0; \Gamma_{22} = [\gamma]_{01}^b + [\gamma]_{03}^b;$$

$$\Gamma_{23} = (\gamma)^0 \left( \left[\frac{\gamma}{\gamma_i}\right]_{02}^a - \left[\frac{\gamma}{\gamma_i}\right]_{01}^a \right);$$

$$\Gamma_{24} = \Gamma_{23}; \Gamma_{25} = [\gamma^2]_{01}^b - [\gamma^2]_{03}^b; \Gamma_{31} = \Gamma_{32} = \Gamma_{35} = 0;$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{33} = \left[\frac{\gamma}{\gamma_i}\right]_{01}^a + \left[\frac{\gamma}{\gamma_i}\right]_{03}^a + \left[\frac{\gamma}{\gamma_i}\right]_{02}^a + \left[\frac{\gamma}{\gamma_i}\right]_{01}^a - \\ - \left(\frac{\gamma_i}{\gamma} - \frac{2}{\gamma\gamma_i}\right)^0 \left[ \left(\frac{\gamma^2}{\gamma_i^2 - 1}\right)^0 + \left(\frac{\gamma^2}{\gamma_i^2 - 1}\right)' \right] - k \left(\frac{\gamma_i}{\gamma}\right)^0 (R_1)^0; \end{aligned}$$

$$\Gamma_{34} = \left[\frac{\gamma}{\gamma_i}\right]_{01}^a + \left[\frac{\gamma}{\gamma_i}\right]_{03}^a - \left[\frac{\gamma}{\gamma_i}\right]_{02}^a - \left[\frac{\gamma}{\gamma_i}\right]_{01}^a; \quad (1.39)$$

$$\Gamma_{41} = \Gamma_{42} = \Gamma_{45} = 0; \Gamma_{43} = \Gamma_{34};$$

$$\Gamma_{44} = \left[\frac{\gamma}{\gamma_i}\right]_{01}^a + \left[\frac{\gamma}{\gamma_i}\right]_{03}^a + \left[\frac{\gamma}{\gamma_i}\right]_{02}^a + \left[\frac{\gamma}{\gamma_i}\right]_{04}^a + \left(\frac{\gamma_i}{\gamma} - \frac{2}{\gamma\gamma_i}\right)^0 [(\gamma^2)^0 + (\gamma^2)'] -$$

$$- k \left(\frac{\gamma_i}{\gamma}\right)^0 (R_2)^0; \Gamma_{51} = [\gamma]_{02}^b - [\gamma]_{01}^b; \Gamma_{52} = [\gamma]_{01}^b - [\gamma]_{03}^b;$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{53} = \Gamma_{54} = 0; \Gamma_{55} = [\gamma^2]_{01}^b + [\gamma^2]_{03}^b + [\gamma^2]_{02}^b + [\gamma^2]_{01}^b - \\ - [(\gamma^2)^0 + (\gamma^2)'] + 3k(R_3)^0; \end{aligned}$$

$$T_1 = (\gamma)^0 (a_1 - a_3) - (b_2 - b_4) - k(\gamma)^0 (p, 1 + q, 1 + \tau, 2)^0;$$

$$T_2 = (\gamma)^0 (a_2 - a_4) + b_1 - b_3 - k(\gamma)^0 (p, 2 - q, 2 + \tau, 1)^0;$$

$$T_3 = a_1 + a_3 + a_2 + a_4 - \eta_1 (v_{1,1} + v_{2,2})' + \eta_2 [(R_1)^0 - (R_1)'] p' + \eta_3 (R_1 p)';$$

$$\begin{aligned} T_4 = a_1 + a_3 - a_2 - a_4 + \eta_1 (v_{1,1} - v_{2,2})' + \eta_2 [(R_2)^0 - \\ - (R_2)'] q' + \eta_4 (R_2 q)'; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_5 = b_1 + b_3 - b_2 - b_4 - k(v_{1,2} + v_{2,1})' - 3k[(R_3)^0 - \\ - (R_3)'] \tau' - 4k(R_3 \tau)'; \end{aligned}$$

$$\eta_1 = k \left( \frac{\gamma_i}{\gamma} - \frac{2}{\gamma\gamma_i} \right)^0; \quad \eta_2 = k \left( \frac{\gamma_i}{\gamma} \right)^0; \quad \eta_3 = 2k \left( \frac{1}{\gamma\gamma_i} \right)^0; \quad \eta_4 = 2k \left( \frac{\gamma_i}{\gamma} - \frac{1}{\gamma\gamma_i} \right)^0.$$

Уравнения (1.38) содержат величины, искомые функции и их производные [см. (1.34)], относящиеся к точкам пересечения бихарактеристики с плоскостью  $t=t_0-k$ . Чтобы привести эти уравнения к расчетной схеме, разложим их в ряд Тейлора, удержав члены, обеспечивающие точность порядка  $O(k^3)$ .

Итак,

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{k}{2} \left\{ \tau_{.2} + \left( \frac{\gamma_i}{\gamma} - \frac{2}{\gamma\gamma_i} \right)^a v_{2.2} + \left( \frac{\gamma_i^2-1}{\gamma\gamma_i} R_1 \right)^a p' + \left( \frac{1}{\gamma\gamma_i} R_2 \right)^a q' \right\} + \\ &+ \frac{k^2}{2} \left( \frac{\gamma_i}{\gamma} \right)' \left\{ \tau_{.12} + \left( \frac{\gamma_i}{\gamma} - \frac{2}{\gamma\gamma_i} \right)^a v_{2.12} + \left( \frac{\gamma_i^2-1}{\gamma\gamma_i} R_1 \right)^a p_{.1} + \right. \\ &+ \left. \left( \frac{1}{\gamma\gamma_i} R_2 \right)^a q_{.1} \right\} + k \left( \frac{\gamma_i}{\gamma} \right)' \left\{ v_{1.1} + \left[ \frac{\gamma}{\gamma_i} \right]_{01}^a p_{.1} + \left[ \frac{\gamma}{\gamma_i} \right]_{03}^a q_{.1} \right\} + \\ &+ \frac{k^2}{2} \left( \left( \frac{\gamma_i}{\gamma} \right)' \right)^2 \left\{ v_{1.11} + \left[ \frac{\gamma}{\gamma_i} \right]_{01}^a p_{.11} + \left[ \frac{\gamma}{\gamma_i} \right]_{03}^a q_{.11} \right\}; \\ a_2 &= \frac{k}{2} \left\{ \tau_{.1} + \left( \frac{\gamma_i}{\gamma} - \frac{2}{\gamma\gamma_i} \right)^a v_{1.1} + \left( \frac{\gamma_i^2-1}{\gamma\gamma_i} R_1 \right)^a p' - \left( \frac{1}{\gamma\gamma_i} R_2 \right)^a q' \right\} + \\ &+ \frac{k^2}{2} \left( \frac{\gamma_i}{\gamma} \right)' \left\{ \tau_{.12} + \left( \frac{\gamma_i}{\gamma} - \frac{2}{\gamma\gamma_i} \right)^a v_{1.12} + \left( \frac{\gamma_i^2-1}{\gamma\gamma_i} R_1 \right)^a p_{.2} - \left( \frac{1}{\gamma\gamma_i} R_2 \right)^a q_{.2} \right\} + \\ &+ k \left( \frac{\gamma_i}{\gamma} \right)' \left\{ v_{2.2} + \left[ \frac{\gamma}{\gamma_i} \right]_{02}^a p_{.2} - \left[ \frac{\gamma}{\gamma_i} \right]_{02}^a q_{.2} \right\} + \frac{k^2}{2} \left( \left( \frac{\gamma_i}{\gamma} \right)' \right)^2 \left\{ v_{2.22} + \right. \\ &+ \left. \left[ \frac{\gamma}{\gamma_i} \right]_{02}^a (p_{.22} - q_{.22}) \right\}; \\ a_3 &= -\frac{k}{2} \left\{ \tau_{.2} - \left( \frac{\gamma_i}{\gamma} - \frac{2}{\gamma\gamma_i} \right)^a v_{2.2} - \left( \frac{\gamma_i^2-1}{\gamma\gamma_i} R_1 \right)^a p' - \left( \frac{1}{\gamma\gamma_i} R_2 \right)^a q' \right\} + \\ &+ \frac{k^2}{2} \left( \frac{\gamma_i}{\gamma} \right)' \left\{ \tau_{.12} - \left( \frac{\gamma_i}{\gamma} - \frac{2}{\gamma\gamma_i} \right)^a v_{2.12} - \left( \frac{\gamma_i^2-1}{\gamma\gamma_i} R_1 \right)^a p_{.1} - \left( \frac{1}{\gamma\gamma_i} R_2 \right)^a q_{.1} \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ k \left( \frac{\gamma_i}{\gamma} \right)' \left\{ v_{1.1} - \left[ \frac{\gamma}{\gamma_i} \right]_{03}^a (p_{.1} + q_{.1}) \right\} - \frac{k^2}{2} \left( \left( \frac{\gamma_i}{\gamma} \right)' \right)^2 \left\{ v_{1.11} - \right. \\ &+ \left. \left[ \frac{\gamma}{\gamma_i} \right]_{03}^a (p_{.11} + q_{.11}) \right\}; \\ a_4 &= -\frac{k}{2} \left\{ \tau_{.1} - \left( \frac{\gamma_i}{\gamma} - \frac{2}{\gamma\gamma_i} \right)^a v_{1.1} - \left( \frac{\gamma_i^2-1}{\gamma\gamma_i} R_1 \right)^a p' + \left( \frac{1}{\gamma\gamma_i} R_2 \right)^a q' \right\} + \\ &+ \frac{k^2}{2} \left( \frac{\gamma_i}{\gamma} \right)' \left\{ \tau_{.12} - \left( \frac{\gamma_i}{\gamma} - \frac{2}{\gamma\gamma_i} \right)^a v_{1.12} - \left( \frac{\gamma_i^2-1}{\gamma\gamma_i} R_1 \right)^a p_{.2} + \left( \frac{1}{\gamma\gamma_i} R_2 \right)^a q_{.2} \right\} + \\ &+ k \left( \frac{\gamma_i}{\gamma} \right)' \left\{ v_{2.2} - \left[ \frac{\gamma}{\gamma_i} \right]_{01}^a (p_{.2} - q_{.2}) \right\} - \frac{k^2}{2} \left( \left( \frac{\gamma_i}{\gamma} \right)' \right)^2 \left\{ v_{2.22} - \right. \\ &+ \left. \left[ \frac{\gamma}{\gamma_i} \right]_{01}^a (p_{.22} - q_{.22}) \right\}; \\ b_1 &= -\frac{k}{2} \left\{ (\gamma)_1^b q_{.2} - (\gamma)_1^b p_{.2} - v_{1.2} + (R_3)_1^b \tau' \right\} - \\ &- \frac{k^2}{2} \left( \frac{1}{\gamma} \right)' \left\{ (\gamma)_1^b (q_{.12} - p_{.12}) - v_{1.12} + (R_3)_1^b \tau_{.1} \right\} + k \left( \frac{1}{\gamma} \right)' \left\{ [\gamma]_{01}^b v_{2.1} + \right. \\ &+ \left. [\gamma^2]_{01}^b \tau_{.1} \right\} + \frac{k^2}{2} \left( \left( \frac{1}{\gamma} \right)' \right)^2 \left\{ [\gamma]_{01}^b v_{2.11} + [\gamma^2]_{01}^b \tau_{.11} \right\}; \\ b_2 &= -\frac{k}{2} \left\{ (\gamma)_2^b (q_{.1} + p_{.1}) + v_{2.1} - (R_3)_2^b \tau' \right\} - \frac{k^2}{2} \left( \frac{1}{\gamma} \right)' \left\{ (\gamma)_2^b (q_{.12} + \right. \\ &+ \left. p_{.12} + v_{2.12} - (R_3)_2^b \tau_{.2} \right\} - k \left( \frac{1}{\gamma} \right)' \left\{ [\gamma]_{02}^b v_{1.2} + [\gamma^2]_{02}^b \tau_{.2} \right\} - \\ &- \frac{k^2}{2} \left( \left( \frac{1}{\gamma} \right)' \right)^2 \left\{ [\gamma]_{02}^b v_{1.22} + [\gamma^2]_{02}^b \tau_{.22} \right\}; \\ b_3 &= \frac{k}{2} \left\{ (\gamma)_3^b (p_{.2} - q_{.2}) - v_{1.2} + (R_3)_3^b \tau' \right\} + \frac{k^2}{2} \left( \frac{1}{\gamma} \right)' \left\{ (\gamma)_3^b (p_{.12} - q_{.12}) - \right. \\ &- \left. v_{1.12} + (R_3)_3^b \tau_{.1} \right\} - k \left( \frac{1}{\gamma} \right)' \left\{ [\gamma]_{03}^b v_{2.1} - [\gamma^2]_{03}^b \tau_{.1} \right\} - \\ &- \frac{k^2}{2} \left( \left( \frac{1}{\gamma} \right)' \right)^2 \left\{ [\gamma]_{03}^b v_{2.11} - [\gamma^2]_{03}^b \tau_{.11} \right\}; \end{aligned}$$

$$b_4 = \frac{k}{2} \{ (\gamma)_4^b (p_{.1} + q_{.1}) - v_{2.1} + (R_3)_4^b \tau' \} - \frac{k^2}{2} \left( \frac{1}{\gamma} \right)' \{ (\gamma)_4^b (q_{.12} + p_{.12}) - v_{2.12} + (R_3)_4^b \tau_{.2} \} - k \left( \frac{1}{\gamma} \right)' \{ [\gamma]_{0_4}^b v_{1.2} - [\gamma^2]_{0_4}^b \tau_{.2} \} + \frac{k^2}{2} \left( \left( \frac{1}{\gamma} \right)' \right)^2 \{ [\gamma]_{0_4}^b v_{1.22} - [\gamma^2]_{0_4}^b \tau_{.22} \}.$$

Наконец, если принять центрированные разности для аппроксимации производных, вычисляемых в точках плоскости  $t = t_0 - k$ , то система уравнений (1.38) позволит получить решение в точках плоскости  $t = t_0$ , являющихся вершинами круговых характеристических конусов. Окончательная разностная схема является девятиточечной, так как центрированные разностные формулы для производных  $(f_n)_{.1}$ ,  $(f_n)_{.2}$ ,  $(f_n)_{.11}$ ,  $(f_n)_{.22}$ ,  $(f_n)_{.12}$  в точке  $(x_1^0, x_2^0, t_0 - k)$  включают величины  $f_n$  ( $n = 1, 5$ ) в  $(x_1^0, x_2^0, t_0 - k)$  и в восьми соседних точках.

Расчет в граничных точках области. Для определенности изложения выбирается конечная область — прямоугольник из упругопластического материала, стороны которого параллельны координатным линиям (рис. 3). Выводятся разностные

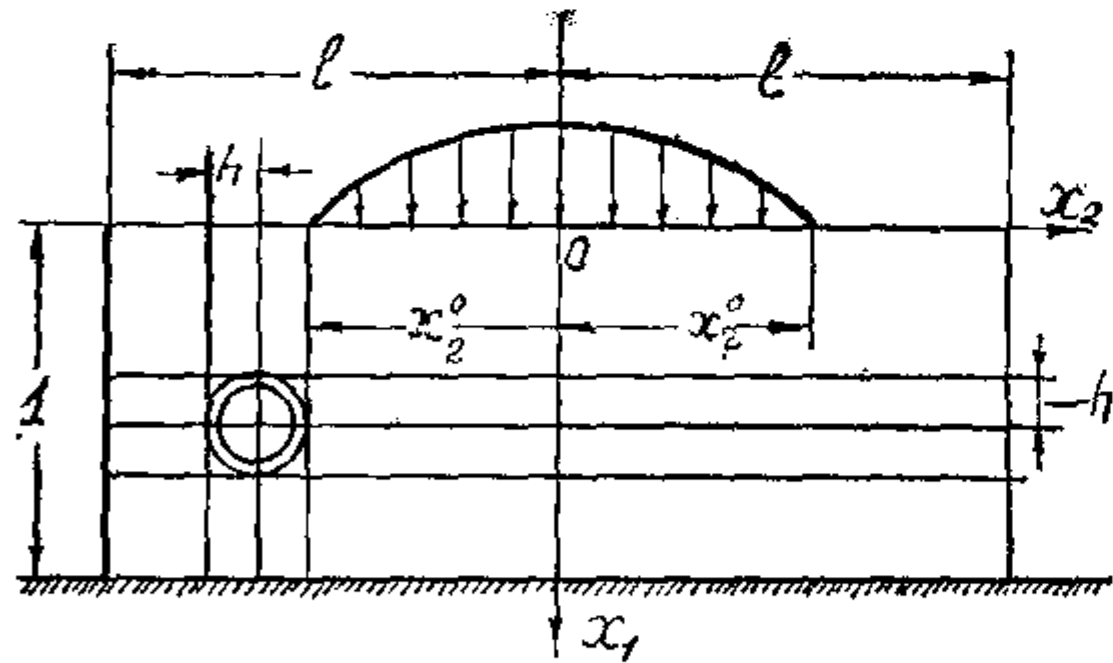


Рис. 3. Исследуемая область, узловые точки и основания конусов

уравнения для отыскания решения в граничных точках плоскости  $t = t_0$  (исключая угловые) по заданным значениям искоемых величин на слое  $t = t_0 - k$  выбранной области.

Особенностью расчета на границе является то, что некоторые бихарактеристики проходят вне рассматриваемой об-

ласти и пересекают плоскость начальных данных  $t = t_0 - k$  в точках, которые не принадлежат исследуемой области и ее границе (рис. 4). Следовательно, систему (1.38) нельзя непосредственно использовать для расчета в граничных точках — соответствующие члены  $a_j$  и  $b_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ), входящие в эту систему, должны быть исключены. Эта процедура оставляет три уравнения относительно пяти неизвестных  $\delta v_1$ ,  $\delta v_2$ ,  $\delta p$ ,  $\delta q$ ,  $\delta \tau$ . Дополнив эти три уравнения двумя условиями (1.14), заданными на границе, однозначно определим три неизвестные величины на границе. Естественно, угловые точки исключим из рассмотрения.

Такие выкладки можно выполнить в произвольной точке границы  $x_1 = 0$ ,  $-l < x_2 < l$ . Неизвестные определяются из системы уравнений, полученной исключением из системы (1.38) значений  $a_3$  и  $b_3$ . Так, складывая получаемые из (1.38) соотношения при  $m = 3$ , умноженном на  $(\gamma)^0$ , и при  $m = 1$ , получим:

$$\Gamma_{11} \delta v_1 + (\Gamma_{13} + (\gamma)^0 \Gamma_{33}) \delta p + (\Gamma_{14} + (\gamma)^0 \Gamma_{34}) \delta q + \Gamma_{15} \delta \tau = T_1 + (\gamma)^0 T_3.$$

Предполагается при этом, что в выражениях  $\Gamma_{13} + (\gamma)^0 \Gamma_{33}$ ,  $\Gamma_{14} + (\gamma)^0 \Gamma_{34}$  и  $T_1 + (\gamma)^0 T_3$  величины  $a_3$ ,  $b_3$  исключены. Здесь для сокращения записи сохранены обозначения (1.39). Одновременно исключены члены  $[\dots]_{03}^s$ ,  $s = a, b$ , входящие в коэффициенты  $\Gamma_{ij}$  ( $i, j = 1, 5$ ).

Аналогичным образом получают еще два уравнения на этой границе, а также соответствующая система уравнений для расчета на других участках границы.

Итак, для точек границы  $x_1 = 0$ ,  $-l < x_2 < l$  имеем систему уравнений

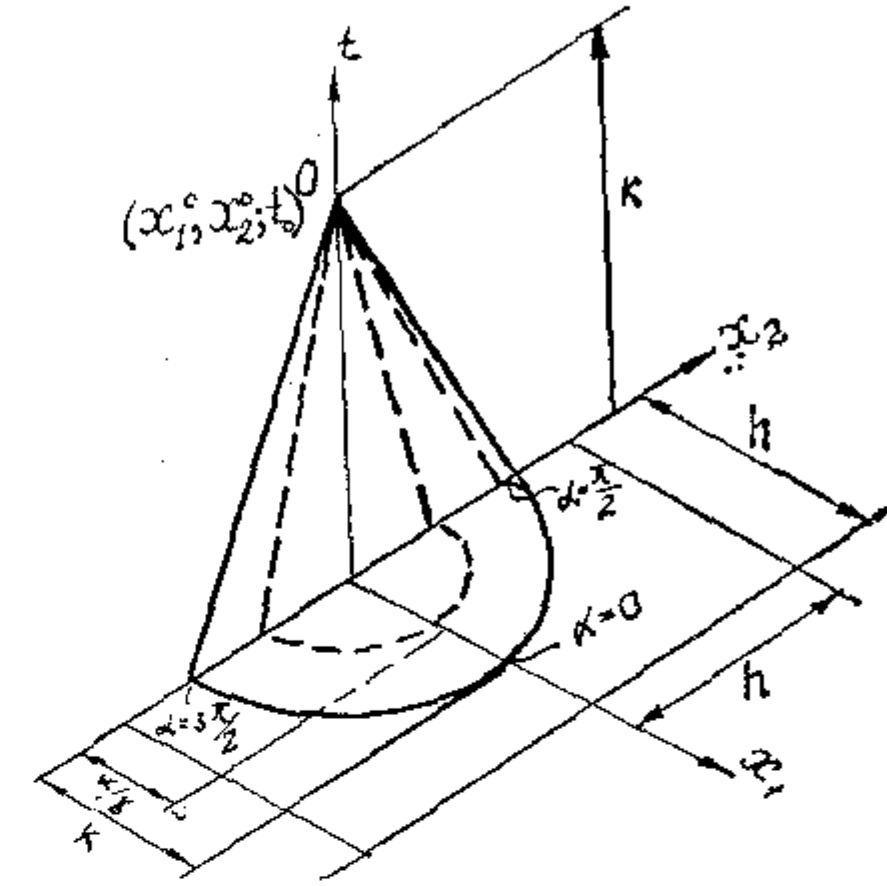


Рис. 4. Вид характеристического конуса на контуре  $x_1 = 0$



$$\begin{aligned}
& \Gamma_{11}\delta v_1 + (\Gamma_{13} + (\gamma)^0\Gamma_{33})\delta\rho + (\Gamma_{14} + (\gamma)^0\Gamma_{34})\delta q + \\
& \quad + \Gamma_{15}\delta\tau = T_1 + (\gamma)^0T_3; \\
& \Gamma_{11}\delta v_1 + (\Gamma_{13} + (\gamma)^0\Gamma_{43})\delta\rho + (\Gamma_{14} + (\gamma)^0\Gamma_{44})\delta q + \\
& \quad + \Gamma_{15}\delta\tau = T_1 + (\gamma)^0T_4; \\
& \Gamma_{51}\delta v_1 + (\Gamma_{22} + \Gamma_{52})\delta v_2 + \Gamma_{23}\delta\rho - \Gamma_{24}\delta q + \\
& \quad + (\Gamma_{25} + \Gamma_{55})\delta\tau = T_2 + T_5.
\end{aligned} \tag{1.40}$$

Для точек границы  $0 < x_1 < L$ ,  $x_2 = l$  [из системы (1.38) исключаются значения  $a_2$  и  $b_2$ ] имеет место:

$$\begin{aligned}
& \Gamma_{22}\delta v_2 + (\Gamma_{23} + (\gamma)^0\Gamma_{43})\delta\rho + ((\gamma)^0\Gamma_{44} - \Gamma_{24})\delta q + \\
& \quad + \Gamma_{25}\delta\tau = T_2 + (\gamma)^0T_4; \\
& -\Gamma_{22}\delta v_2 + ((\gamma)^0\Gamma_{33} - \Gamma_{23})\delta\rho + ((\gamma)^0\Gamma_{34} + \Gamma_{24})\delta q - \\
& \quad - \Gamma_{25}\delta\tau = (\gamma)^0T_3 - T_2; \\
& (\Gamma_{11} - \Gamma_{51})\delta v_1 - \Gamma_{52}\delta v_2 + \Gamma_{13}\delta\rho + \Gamma_{14}\delta q + \\
& \quad + (\Gamma_{15} - \Gamma_{55})\delta\tau = T_1 - T_5.
\end{aligned} \tag{1.41}$$

Система уравнений для точек границы  $0 < x_1 < L$ ,  $x_2 = -l$  [здесь из системы (1.38) исключаются значения  $a_4$  и  $b_4$ ] имеет вид:

$$\begin{aligned}
& \Gamma_{22}\delta v_2 + (\Gamma_{23} + (\gamma)^0\Gamma_{33})\delta\rho + ((\gamma)^0\Gamma_{34} - \Gamma_{24})\delta q + \\
& \quad + \Gamma_{25}\delta\tau = T_2 + (\gamma)^0T_3; \\
& -\Gamma_{22}\delta v_2 + ((\gamma)^0\Gamma_{43} - \Gamma_{23})\delta\rho + ((\gamma)^0\Gamma_{44} + \Gamma_{24})\delta q - \\
& \quad - \Gamma_{25}\delta\tau = (\gamma)^0T_4 - T_2; \\
& (\Gamma_{11} + \Gamma_{51})\delta v_1 + \Gamma_{52}\delta v_2 + \Gamma_{13}\delta\rho + \Gamma_{14}\delta q + \\
& \quad + (\Gamma_{15} + \Gamma_{55})\delta\tau = T_1 + T_5.
\end{aligned} \tag{1.42}$$

Наконец, для точек границы  $x_1 = L$ ,  $-l < x_2 < l$  [из системы (1.38) исключаются значения  $a_1$  и  $b_1$ ] получим систему:

$$\begin{aligned}
& -\Gamma_{11}\delta v_1 + ((\gamma)^0\Gamma_{33} - \Gamma_{13})\delta\rho + ((\gamma)^0\Gamma_{34} - \Gamma_{14})\delta q - \\
& \quad - \Gamma_{15}\delta\tau = (\gamma)^0T_3 - T_1; \\
& -\Gamma_{11}\delta v_1 + ((\gamma)^0\Gamma_{43} - \Gamma_{13})\delta\rho + ((\gamma)^0\Gamma_{44} - \Gamma_{14})\delta q - \\
& \quad - \Gamma_{15}\delta\tau = (\gamma)^0T_4 - T_1; \\
& -\Gamma_{51}\delta v_1 + (\Gamma_{22} - \Gamma_{51})\delta v_2 + \Gamma_{23}\delta\rho - \Gamma_{24}\delta q + \\
& \quad + (\Gamma_{25} - \Gamma_{55})\delta\tau = T_2 - T_5.
\end{aligned} \tag{1.43}$$

*Расчет в угловых точках.* В этом случае система (1.38) дает одно уравнение. Кроме того, если на взаимно перпендикулярных площадках контура заданы касательные напряжения, то в угловой точке выполняются условия их равенства — закон парности касательных напряжений. Это обстоятельство уменьшает число заданных условий в угловой точке на единицу, и для того чтобы получить замкнутую систему уравнений, необходимо дополнительное условие. Этим условием может быть уравнение, в котором исключены все функции из системы (1.38), кроме функции типа  $(v_{12} - v_{21})^0$  [11].

Для области  $x_1 > 0$ ,  $x_2 \geq l$  в угловой точке  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = l$  величины  $a_2$ ,  $a_3$ ,  $b_2$ ,  $b_3$  должны быть исключены в уравнениях (1.38); они взяты вдоль бихарактеристик, проходящих вне границы. Тогда

$$\begin{aligned}
& (\Gamma_{11} - \Gamma_{51})\delta v_1 - (\Gamma_{22} + \Gamma_{52})\delta v_2 + ((\gamma)^0\Gamma_{33} - \\
& - \Gamma_{23} - \Gamma_{13})\delta\rho + ((\gamma)^0\Gamma_{34} + \Gamma_{24} + \Gamma_{14})\delta q + (\Gamma_{15} - \Gamma_{55} - \\
& - \Gamma_{25})\delta\tau = (\gamma)^0T_3 - T_2 + T_1 - T_5.
\end{aligned} \tag{1.44}$$

Исключение из системы (1.38) величин  $a_3$ ,  $a_4$ ,  $b_3$ ,  $b_4$  позволяет записать для угловой точки  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = -l$  уравнение вида

$$\begin{aligned}
& (\Gamma_{11} + \Gamma_{51})\delta v_1 + (\Gamma_{22} + \Gamma_{52})\delta v_2 + (\Gamma_{13} + (\gamma)^0\Gamma_{33} + \Gamma_{23})\delta\rho + \\
& \quad + (\Gamma_{14} + (\gamma)^0\Gamma_{34} - \Gamma_{24})\delta q + (\Gamma_{15} + \Gamma_{25} + \Gamma_{55})\delta\tau = \\
& \quad = T_1 + (\gamma)^0T_3 + T_2 + T_5.
\end{aligned} \tag{1.45}$$

Аналогично исключив величины  $a_1$ ,  $a_4$ ,  $b_1$ ,  $b_4$ , получим уравнение для угловой точки  $x_1 = L$ ,  $x_2 = -l$  в виде

$$\begin{aligned}
& -(\Gamma_{11} + \Gamma_{51}) \delta v_1 + (\Gamma_{22} - \Gamma_{52}) \delta v_2 + (\Gamma_{23} + (\gamma)^0 \Gamma_{33} - \\
& - \Gamma_{13}) \delta p + ((\gamma)^0 \Gamma_{34} - \Gamma_{24} - \Gamma_{14}) \delta q + (\Gamma_{25} - \Gamma_{15} - \Gamma_{55}) \delta \tau = \\
& = T_2 + (\gamma)^0 T_3 - T_1 - T_5. \quad (1.46)
\end{aligned}$$

Наконец, для расчета неизвестных в угловой точке  $x_1 = L$ ,  $x_2 = l$  из системы (1.38) исключены величины  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  и получено уравнение:

$$\begin{aligned}
& (\Gamma_{51} - \Gamma_{11}) \delta v_1 - (\Gamma_{22} - \Gamma_{52}) \delta v_2 + ((\gamma)^0 \Gamma_{33} - \Gamma_{13} - \\
& - \Gamma_{23}) \delta p + ((\gamma)^0 \Gamma_{34} - \Gamma_{14} + \Gamma_{24}) \delta q - (\Gamma_{15} + \Gamma_{25} - \\
& - \Gamma_{55}) \delta \tau = (\gamma)^0 T_3 - T_1 - T_2 + T_5. \quad (1.47)
\end{aligned}$$

### 5. Разностные уравнения динамики упругого изотропного тела

Так как полученные соотношения, относящиеся к построению расчетных формул упругопластических задач, применимы к задачам теории упругости при условии  $\frac{\sigma_i}{\epsilon_i} = \frac{3\mu}{\rho c_1^2}$ , то из систем (1.38) — (1.47) получатся соответствующие выражения для решения задачи о прямоугольной области из упругого изотропного материала (см. рис. 3). Приведем конечный вид формул.

Для внутренних точек  $0 < x_1 < L$ ,  $-l < x_2 < l$  они получены из системы (1.38):

$$\begin{aligned}
2\delta v_1 &= -\left(\frac{1}{\gamma^2} - 1\right) k^2 v_{2,12} + k^2 v_{1,11} + \left(\frac{k}{\gamma}\right)^2 v_{1,22} + 2k(p_{,1} + q_{,1} + \tau_{,2}); \\
2\delta v_2 &= -\left(\frac{1}{\gamma^2} - 1\right) k^2 v_{1,12} + \left(\frac{k}{\gamma}\right)^2 v_{2,11} + k^2 v_{2,22} + 2k(p_{,2} - q_{,2} + \tau_{,1}); \\
& \quad (1.48)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{2\gamma^2}{\gamma^2 - 1} \delta p &= 2k^2 \tau_{,12} + k^2(p_{,11} + q_{,11} + p_{,22} - q_{,22}) + 2k(v_{1,1} + v_{2,2}); \\
2\gamma^2 \delta q &= k^2(p_{,11} + q_{,11} - p_{,22} + q_{,22}) + 2k(\tau_{1,1} - \tau_{2,2}); \\
2\gamma^2 \delta \tau &= 2k^2 p_{,12} + k^2(\tau_{,11} + \tau_{,22}) + 2k(v_{1,2} + v_{2,1}).
\end{aligned}$$

Для контурных точек  $x_1 = 0$ ,  $-l < x_2 < l$  — из системы (1.40):

$$\begin{aligned}
2\delta v_1 + \frac{2\gamma^2}{\gamma^2 - 1} \delta p &= 2k^2 \tau_{,12} - \left(\frac{1}{\gamma^2} - 1\right) k^2 v_{2,12} + k^2(p_{,22} - q_{,22}) + \\
& + \left(\frac{k}{\gamma}\right)^2 v_{1,22} + 2k(v_{1,1} + p_{,1} + q_{,1} + v_{2,2} + \tau_{,2}); \\
2\delta v_1 + 2\gamma^2 \delta q &= -\left(\frac{1}{\gamma^2} - 1\right) k^2 v_{2,12} + k^2(q_{,22} - p_{,22}) + \\
& + 2k(v_{1,1} + p_{,1} + q_{,1} - v_{2,2} + \tau_{,2}); \quad (1.49)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\delta v_2 + 2\gamma \delta \tau &= -\left(\frac{1}{\gamma^2} - 1\right) k^2 v_{1,12} + k^2 v_{2,22} + \frac{2k^2}{\gamma} p_{,12} + \frac{k^2}{\gamma} \tau_{,22} + \\
& + 2k(p_{,2} - q_{,2} + \tau_{,1}) + \frac{2k}{\gamma} (v_{1,2} + v_{2,1}).
\end{aligned}$$

Для контура  $0 < x_1 < L$ ,  $x_2 = l$  — из системы (1.47):

$$\begin{aligned}
2\delta v_1 - 2\gamma \delta \tau &= -\left(\frac{1}{\gamma^2} - 1\right) k^2 v_{2,12} + k^2 v_{1,11} - \frac{k^2}{\gamma} \tau_{,11} - \frac{2k^2}{\gamma} p_{,12} + \\
& + 2k(p_{,1} + q_{,1} + \tau_{,2}) - \frac{2k}{\gamma} (v_{1,2} + v_{2,1}); \\
2\delta v_2 - \frac{2\gamma^2}{\gamma^2 - 1} \delta p &= \left(\frac{1}{\gamma^2} - 1\right) k^2 v_{1,12} - 2k^2 \tau_{,12} - k^2(p_{,11} + q_{,11}) + \\
& + \left(\frac{k}{\gamma}\right)^2 v_{2,11} + 2k(-v_{1,1} - v_{2,2} + p_{,2} - q_{,2} + \tau_{,1}); \quad (1.50)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\delta v_2 + 2\gamma^2 \delta q &= -\left(\frac{1}{\gamma^2} - 1\right) k^2 v_{1,12} + k^2(p_{,11} + q_{,11}) + \left(\frac{k}{\gamma}\right)^2 v_{2,11} + \\
& + 2k(v_{1,1} - v_{2,2} + p_{,2} - q_{,2} + \tau_{,1}).
\end{aligned}$$

Для контура  $0 < x_1 < L$ ,  $x_2 = -l$  — из системы (1.42):

$$\begin{aligned}
2\delta v_1 + 2\gamma \delta \tau &= -\left(\frac{1}{\gamma^2} - 1\right) k^2 v_{2,12} + \frac{2k^2}{\gamma} p_{,12} + \frac{k^2}{\gamma} \tau_{,11} + k^2 v_{1,11} + \\
& + 2k(p_{,1} + q_{,1} + \tau_{,2}) + \frac{2k}{\gamma} (v_{1,2} + v_{2,1}); \\
2\delta v_2 + \frac{2\gamma^2}{\gamma^2 - 1} \delta p &= -\left(\frac{1}{\gamma^2} - 1\right) k^2 v_{1,12} + 2k^2 \tau_{,12} +
\end{aligned}$$

$$+k^2(p_{.11}+q_{.11})+\left(\frac{k}{\gamma}\right)^2 v_{2.11}+2k(v_{1.1}+v_{2.2}-q_{.2}+p_{.2}+\tau_{.1}); \quad (1.51)$$

$$2\delta v_2-2\gamma^2\delta q=-\left(\frac{1}{\gamma^2}-1\right)k^2v_{1.12}-k^2(p_{.11}+q_{.11})+\left(\frac{k}{\gamma}\right)^2 v_{2.11}+ \\ +2k(-v_{1.1}+v_{2.2}+p_{.2}-q_{.2}+\tau_{.1}).$$

Для контура  $x_1=L$ ,  $-l < x_2 < l$  — из системы (1.43):

$$2\delta v_1-\frac{2\gamma^2}{\gamma^2-1}\delta p=-\left(\frac{1}{\gamma^2}-1\right)k^2v_{2.12}-2k^2\tau_{.12}+\left(\frac{k}{\gamma}\right)^2 v_{1.22}+ \\ +k^2(q_{.22}-p_{.22})+2k(-v_{1.1}-v_{2.2}+p_{.1}+q_{.1}+\tau_{.2});$$

$$2\delta v_1-2\gamma^2\delta q=-\left(\frac{1}{\gamma^2}-1\right)k^2v_{2.12}+\left(\frac{k}{\gamma}\right)^2 v_{1.22}+k^2(p_{.22}-q_{.22})+ \\ +2k(-v_{1.1}+v_{2.2}+p_{.1}+q_{.1}+\tau_{.2}); \quad (1.52)$$

$$2\delta v_1-2\gamma\delta\tau=-\left(\frac{1}{\gamma^2}-1\right)k^2v_{1.12}+k^2v_{2.22}-\frac{2k^2}{\gamma}p_{.12}-\frac{k^2}{\gamma}\tau_{.22}+ \\ +2k(p_{.2}-q_{.2}+\tau_{.1})-\frac{2k}{\gamma}(v_{1.2}+v_{2.1}).$$

Для угловой точки  $x_1=0$ ,  $x_2=l$  — из системы (1.44):

$$\delta v_1+\frac{\gamma^2}{\gamma^2-1}\delta p-\delta v_2-\gamma\delta\tau=k^2\tau_{.12}+\left(\frac{1}{\gamma^2}-1\right)\frac{k^2}{2}v_{1.12}- \\ -\left(\frac{1}{\gamma^2}-1\right)\frac{k^2}{2}v_{2.12}-\frac{k^2}{\gamma}p_{.12}+k(v_{1.1}+p_{.1}+q_{.1}+v_{2.2}-p_{.2}+q_{.2}- \\ -\tau_{.1}+\tau_{.2})-\frac{k}{\gamma}(v_{1.2}+v_{2.1}); \quad (1.53)$$

$$\delta v_1+\delta v_2+\gamma^2\delta q=-\left(\frac{1}{\gamma^2}-1\right)\frac{k^2}{2}v_{2.12}-\left(\frac{1}{\gamma^2}-1\right)\frac{k^2}{2}v_{1.12}-$$

$$-\frac{k^2}{\gamma}q_{.12}-\frac{k}{2\gamma}(-v_{1.2}+v_{2.1})+\frac{k}{2\gamma}(v_{1.2}-v_{2.1})^0+k(v_{1.1}+p_{.1}+ \\ +q_{.1}-v_{2.2}+p_{.2}-q_{.2}+\tau_{.1}+\tau_{.2})+\frac{k}{\gamma}(-v_{1.2}+v_{2.1}).$$

Для угловой точки  $x_1=0$ ,  $x_2=-l$  — из системы (1.45):

$$\delta v_1+\delta v_2+\frac{\gamma^2}{\gamma^2-1}\delta p+\gamma\delta\tau=k^2\tau_{.12}-\left(\frac{1}{\gamma^2}-1\right)\frac{k^2}{2}v_{2.12}- \\ -\frac{k^2}{2}\left(\frac{1}{\gamma^2}-1\right)v_{1.12}+\frac{k^2}{\gamma}p_{.12}+k(v_{1.1}+p_{.1}+q_{.1}+v_{2.2}+p_{.2}-q_{.2}+ \\ +\tau_{.1}+\tau_{.2})+\frac{k}{\gamma}(v_{1.2}+v_{2.1}); \quad (1.54)$$

$$\delta v_1-\delta v_2+\gamma^2\delta q=\frac{k^2}{2}\left(1-\frac{1}{\gamma^2}\right)v_{2.12}+\frac{k^2}{2}\left(\frac{1}{\gamma^2}-1\right)v_{1.12}+ \\ +\frac{k^2}{\gamma}q_{.12}-\frac{k}{2\gamma}(v_{1.2}-v_{2.1})-\frac{k}{2\gamma}(v_{1.2}-v_{2.1})^0+k(v_{1.1}+p_{.1}+q_{.1}- \\ -v_{2.2}-p_{.2}+q_{.2}-\tau_{.1}+\tau_{.2})+\frac{k}{\gamma}(v_{1.2}-v_{2.1}).$$

Для угловой точки  $x_1=L$ ,  $x_2=-l$  — из системы (1.46):

$$\frac{\gamma^2}{\gamma^2-1}\delta p-\delta v_1+\delta v_2-\gamma\delta\tau=k^2\tau_{.12}-\left(\frac{1}{\gamma^2}-1\right)\frac{k^2}{2}v_{1.12}+ \\ +\left(\frac{1}{\gamma^2}-1\right)\frac{k^2}{2}v_{2.12}-\frac{k^2}{\gamma}p_{.12}+k(v_{1.1}+v_{2.2}+p_{.2}-q_{.2}+ \\ +\tau_{.1}-p_{.1}-q_{.1}-\tau_{.2})-\frac{k}{\gamma}(v_{1.2}+v_{2.1}); \quad (1.55)$$

$$\delta v_1+\delta v_2-\gamma^2\delta q=\frac{k^2}{2}\left(1-\frac{1}{\gamma^2}\right)v_{1.12}+\frac{k^2}{2}\left(1-\frac{1}{\gamma^2}\right)v_{2.12}+ \\ +\frac{k^2}{\gamma}q_{.12}+\frac{k}{2\gamma}(v_{2.1}-v_{1.2})+\frac{k}{2\gamma}(v_{2.1}-v_{1.2})^0+k(v_{2.2}+p_{.2}- \\ -q_{.2}-v_{1.1}+p_{.1}+q_{.1}+\tau_{.2}+\tau_{.1})+\frac{k}{\gamma}(v_{1.2}-v_{2.1}).$$

Для угловой точки  $x_1=L$ ,  $x_2=l$  — из системы (1.47):

$$\frac{\gamma^2}{\gamma^2-1}\delta p-\delta v_1-\delta v_2+\gamma\delta\tau=k^2\tau_{.12}+\left(\frac{1}{\gamma^2}-1\right)\frac{k^2}{2}v_{2.12}+$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{1}{\gamma^2} - 1 \right) \frac{k^2}{2} \tau_{1,12} + \frac{k^2}{\gamma} p_{,12} + k(v_{1,1} - p_{,1} - q_{,1} + v_{2,2} - \\
& - p_{,2} + q_{,2} - \tau_{,1} - \tau_{,2}) + \frac{k}{\gamma} (v_{1,2} + v_{2,1}); \quad (1.56)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta v_1 - \delta v_2 - \gamma^2 \delta q = & \frac{k^2}{2} \left( 1 - \frac{1}{\gamma^2} \right) v_{2,12} + \frac{k^2}{2} \left( \frac{1}{\gamma^2} - 1 \right) v_{1,12} - \\
& - \frac{k^2}{\gamma} q_{,12} + \frac{k}{2\gamma} (v_{1,2} - v_{2,1}) + \frac{k}{2\gamma} (v_{1,2} - v_{2,1})^0 + k(-v_{1,1} + p_{,1} + \\
& + q_{,1} + v_{2,2} - p_{,2} + q_{,2} - \tau_{,1} + \tau_{,2}) - \frac{k}{\gamma} (v_{1,2} - v_{2,1}).
\end{aligned}$$

В формулах (1.48) — (1.56)  $\gamma = \frac{c_1}{c_2}$ .

Изложенный подход можно распространить на задачи динамики упругого анизотропного тела [22].

## ГЛАВА 2

### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ ВОЛН В ОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Разработанный в предшествующей главе метод применяется к решению некоторых конкретных динамических задач для однородных сред. Рассмотрены задачи о распространении двумерных возмущений в нелинейной среде, а также в упругих прямоугольнике, полупространстве и составном теле — полосе прямоугольного сечения, лежащей на полупространстве.

#### 1. Распространение волн в нелинейной однородной среде

Решение задачи о распространении двумерных возмущений имеет методическую направленность. При достижении этой цели для описания того или иного реального процесса достаточно использовать деформационную теорию — наиболее простую и не потерявшую практической ценности теорию малых упругопластических деформаций. Численная реализация задачи плоской деформации осуществляется методом пространственных характеристик, подробно описанным в главе 1 (п. 3, 4).

*Постановка задачи.* Рассматривается тело, плоское сечение которого является прямоугольником  $0 \leq x_1 \leq L$ ,  $-l \leq x_2 \leq l$ . Краевая задача Коши, формулируемая для решающих уравнений (1.10), предполагает, что в начальный момент времени  $t=0$  тело находится в состоянии покоя, т. е. при  $t=0$

$$v_1 = v_2 = p = q = \tau = 0. \quad (2.1)$$

Кроме того, для рассматриваемой ограниченной области формулируются граничные условия. Для любого момента времени  $t \geq 0$  они приняты в следующей форме.

Поверхность  $x_1 = L$  свободна от напряжений

$$p + q = 0, \tau = 0; \quad (2.2)$$

на поверхности  $x_1 = 0$  действует нагрузка

$$p + q = At(B_2^2 - x_2^2), \tau = 0; \quad (2.3)$$

поверхность  $x_2 = \pm l$  жестко закреплена

$$v_1 = v_2 = 0. \quad (2.4)$$

В расчетах принималось  $A = 0,02$ ,  $B_2 = 1$ . Вводимые в память ЭВМ значения кривой деформирования  $\sigma_i \sim e_i$  при нормальной температуре приведены в табл. 1.

Таблица 1. Экспериментальная зависимость напряжения — деформации

$e_i \cdot 10^4$	$\sigma_i / 9,8 \text{ МПа}$	$\sigma_i = \sigma_i / \rho c_1^2 \cdot 10^4$	$e_i \cdot 10^4$	$\sigma_i / 9,8 \text{ МПа}$	$\sigma_i = \sigma_i / \rho c_1^2 \cdot 10^4$
0	0	0	19	26,5	9,8429
4	8,00	2,9714	20	27,0	10,0286
6	12,00	4,4572	21	27,5	10,2143
8	16,00	5,9429	22	28,0	10,4000
10	20,00	7,4286	24	28,4	10,5486
11	20,75	7,7072	26	28,8	10,6972
12	21,50	7,9857	28	29,2	10,8458
13	22,25	8,2643	30	29,6	10,9943
14	23,00	8,5429	32	30,0	11,1429
15	23,75	8,8215	46	32,0	11,8858
16	24,50	9,1000	72	34,0	12,6286
17	25,25	9,3786	133	36,0	13,3715
18	26,00	9,6572	3600	74,0	27,4858

Расчет проводится в такой последовательности. В начальный момент времени  $t = 0$  точки исследуемой области находятся в невозмущенном состоянии. Полагая  $\frac{\sigma_i}{e_i} = \frac{3\mu}{\rho c_1^2}$ ,  $\nu = 0,3$ ,

подсчитываем все параметры разностных уравнений для внутренних (1.37), граничных (1.40) — (1.43) и угловых (1.44) — (1.47) точек области в момент времени  $t = k$ , где  $k$  — шаг по времени. В этот момент времени внутренние точки области еще не «возмущены», тогда как в соответствии с формулой (2.3) на границе и в угловых точках реализуется некоторое напряженно-деформированное состояние. Может оказаться, что уже в этот момент времени существует хотя бы одна точка, в которой расчетное значение интенсивности деформаций  $e_i$  превзойдет предел пропорциональности  $e_s$ . Полученное значение  $e_i$  позволяет методами линейной интерполяции найти на кривой деформирования  $\sigma_i \sim e_i$  соответствующую  $e_i$  величину интенсивности напряжения  $\sigma_i^A$ . Из равенства  $\frac{\sigma_i^A}{e_i} = E_s$

(секущий модуль упругости) определяется текущее значение «модуля упругости» пластически деформированной зоны, в которой коэффициент Пуассона принимается равным 0,5. Тем самым нелинейные разрешающие уравнения линеаризуются в  $\epsilon$ -окрестности каждой точки  $(x_1^0, x_2^0; t_0)$ , где параметры уравнения (1.10) считаются постоянными. При этом в каждой точке  $(x_1^0, x_2^0; t_0)$  скорости распространения возмущений

$c = \pm \frac{\gamma_{\pm}}{\gamma}$ ,  $\pm \frac{1}{\gamma}$  оказываются различными, обусловленными глубиной пластической деформации. Если относительная разность  $\frac{|\sigma_i - \sigma_i^A|}{\sigma_i^A}$ , где  $\sigma_i$  — расчетное значение интенсивности

напряжения, окажется меньше некоторой заданной малой величины  $\epsilon$ , то решение считается найденным для момента времени  $t = k$  и следует перейти к расчетам следующего слоя  $t = 2k$  по времени. В противном случае расчет повторяется с уточненными значениями «упругих» характеристик в каждой точке  $(x_1^0, x_2^0; k)$  вплоть до выполнения указанного условия.

Оказалось, что число необходимых итераций на каждом слое по времени зависит от требуемой точности расчетов — величины  $\epsilon$ . Для получения решения требуется тем больше итераций, чем меньше  $\epsilon$ . В качестве иллюстрации в табл. 2 приведены значения интенсивности деформаций, напряжений и относительная степень удаления от кривой деформирования в момент времени  $t = 7k$  в двух точках  $(x_1 = 0, x_2 = 5h)$  и  $(x_1 = h,$

$x_2=11h$ ) исследуемой области. Результаты получены не более чем тремя итерациями, что говорит о быстроте сходимости и эффективности принятых «упругих» решений.

Таблица 2. Значение интенсивности деформации

Точка	Момент времени $t=7k$							
	$\varepsilon_1=0,1$				$\varepsilon_2=0,01$			
$x_1=0$ $x_2=5h$	$e_i \cdot 10^4$	$\sigma_i \cdot 10^4$	$\sigma_i^A \cdot 10^4$	$\frac{ \sigma_i - \sigma_i^A }{\sigma_i^A}$	$e_i \cdot 10^4$	$\sigma_i \cdot 10^4$	$\sigma_i^A \cdot 10^4$	$\frac{ \sigma_i - \sigma_i^A }{\sigma_i^A}$
	27,589	12,449	10,819	0,151	23,605	12,249	10,745	0,140
	28,481	11,169	10,884	0,026	27,424	11,076	10,807	0,025
					27,564	10,862	10,817	0,004
$x_1=h$ $x_2=11h$	$\varepsilon_1=0,1$				$\varepsilon_2=0,01$			
	$e_i \cdot 10^4$	$\sigma_i \cdot 10^4$	$\sigma_i^A \cdot 10^4$	$\frac{ \sigma_i - \sigma_i^A }{\sigma_i^A}$	$e_i \cdot 10^4$	$\sigma_i \cdot 10^4$	$\sigma_i^A \cdot 10^4$	$\frac{ \sigma_i - \sigma_i^A }{\sigma_i^A}$
	11,946	10,240	7,975	0,284	11,996	10,282	7,989	0,287
	12,370	8,258	8,090	0,021	12,432	8,279	8,107	0,021
					12,568	8,195	8,143	0,006

На рис. 5 приведено перемещение во времени передних фронтов упругой волны и пластически деформируемой зоны (а) и способ построения переднего фронта пластической зоны (б). Распространение упомянутой зоны «вширь», а не «вглубь» обусловлено характером приложенной на границе тела нагрузки (2.3). Отчетливо видно, что с каждым шагом по времени фронт распространения «пластической волны» все больше отстает от фронта упругой волны. В связи с этим необходимо разъяснить выбор размеров ячейки  $h$  и шага по времени  $k$  для обеспечения устойчивости решения численной реализации метода при исследовании нелинейно деформируемых сред.

Вопросы устойчивости решения разностных уравнений методом пространственных характеристик, вообще говоря, являются определяющими при численной реализации принятой схемы решения. При анализе уравнений движения упругой среды был получен приближенный критерий устойчивости разностного метода [30]:

$$\left(\frac{k}{h}\right)^2 \leq \min\left\{\frac{\gamma^2}{\gamma^2+1}, \frac{\gamma^2}{2(\gamma^2-1)}\right\}. \quad (2.5)$$

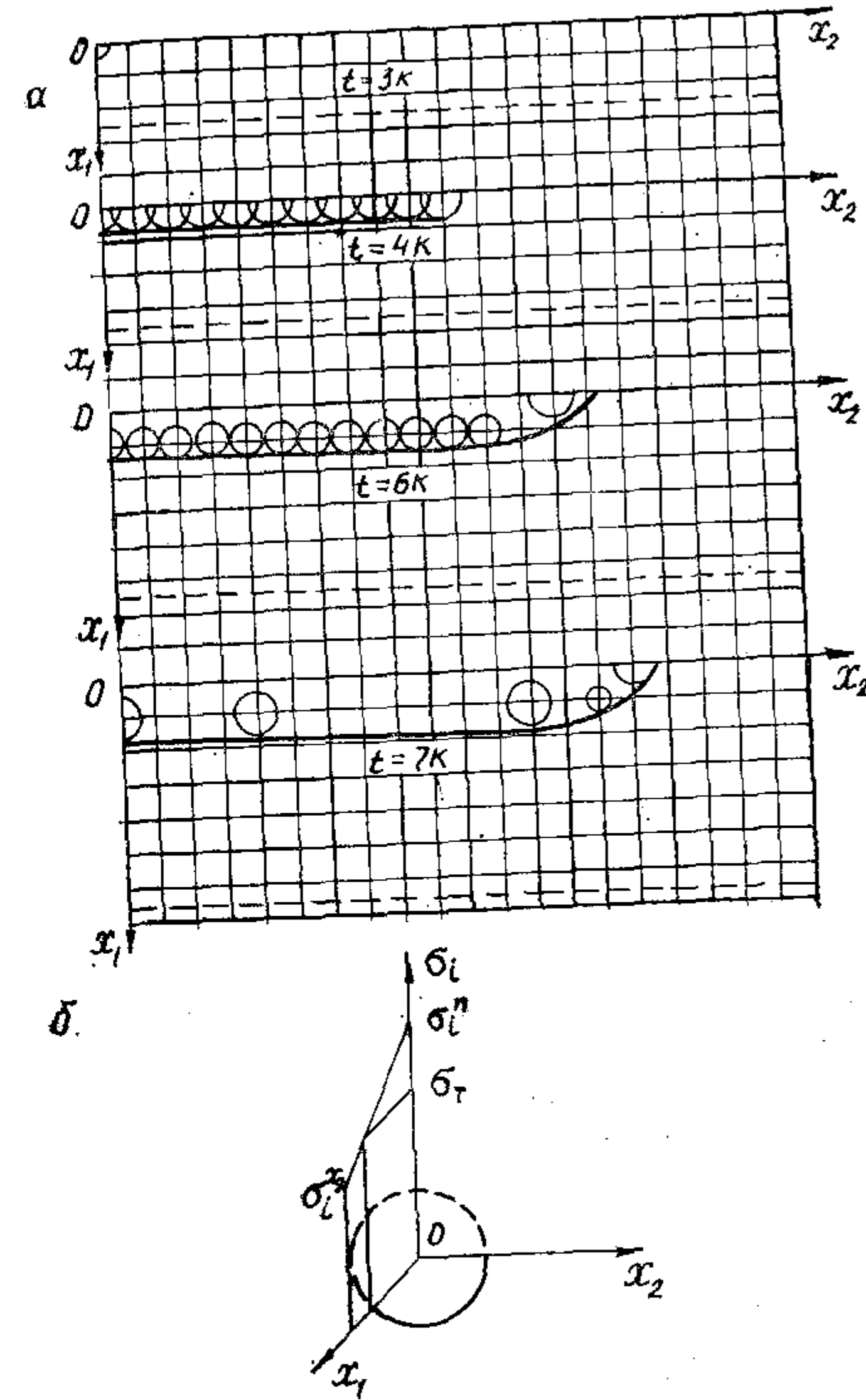


Рис. 5. Перемещение переднего фронта упругих (пунктирная линия) и пластических (сплошная кривая) волн со временем

Как следует из этого критерия, размеры ячейки  $h$  и шаг по времени  $k$  связаны с характеристиками жесткости среды (1.7). Для линейной среды величина  $\gamma$  постоянна, поэтому значения  $n$  и  $k$ , обеспечивающие устойчивость решения, могут быть выбраны заранее. Для нелинейных сред размеры характеристических конусов меняются от точки к точке и во времени. Тре-

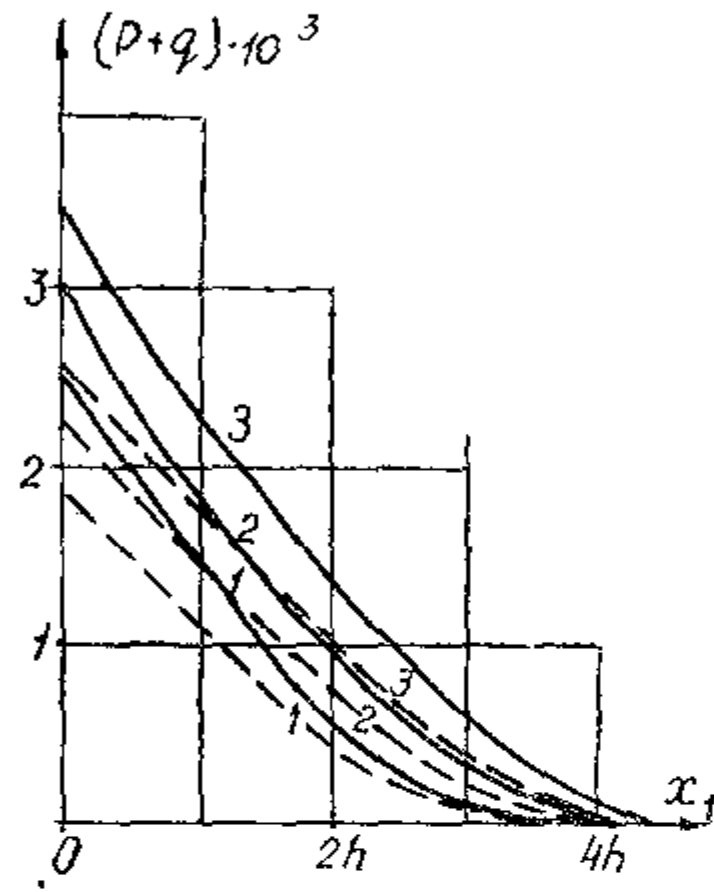


Рис. 6. Изменение напряжений  $p+q$  от продольной координаты  $x_1$  в сечениях  $x_2=0$  (сплошная кривая) и  $x_2=10h$  (пунктирная кривая) для момента времени  $t=5k$  (1),  $t=6k$  (2),  $t=7k$  (3)

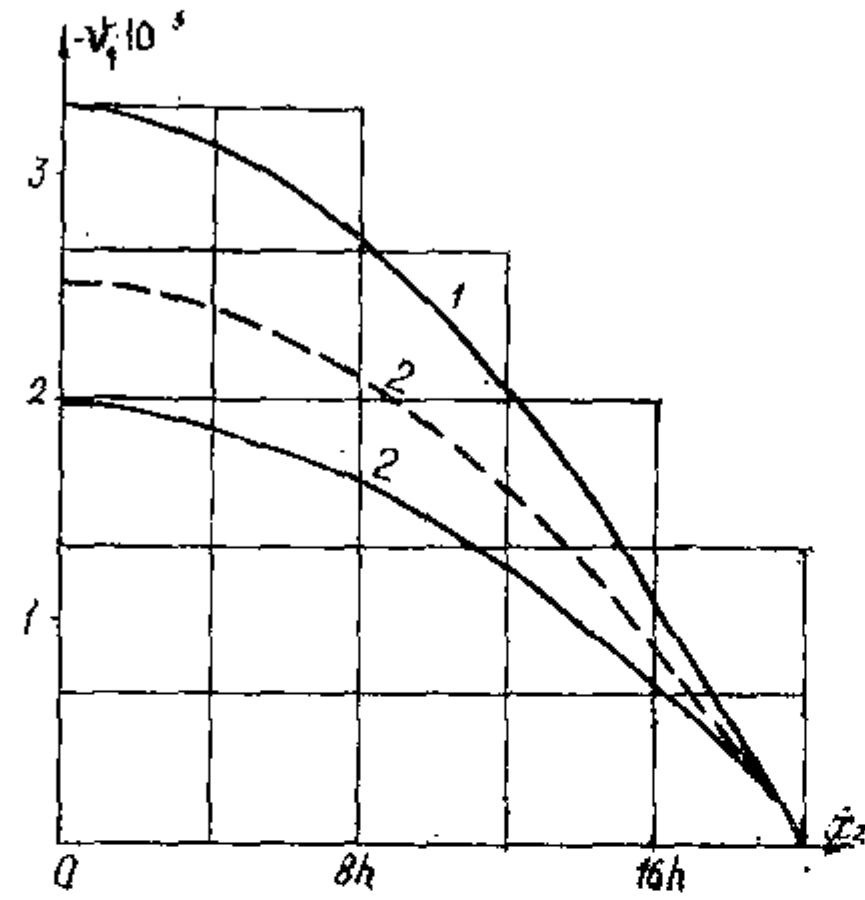


Рис. 7. Изменение продольной скорости перемещения  $v_1$  от поперечной координаты  $x_2$  в сечениях  $x_1=0$  (1),  $x_1=h$  (2) для момента времени  $t=6k$  (сплошные кривые) и  $t=7k$  (пунктирная кривая)

бование устойчивости разностного метода в этом случае сводится к тому, чтобы основание характеристического конуса лежало внутри прямоугольника одной из ячеек, на которые разбивается исследуемая область. В реализации численного метода на ЭВМ удобны постоянные шаги  $k$  во времени и размеры  $h$  ячейки. Они могут соответствовать максимальной скорости распространения волн, что в рассматриваемом случае отвечает начальному (линейному) участку деформирования. Иными словами, выбор параметров  $k$  и  $h$  необходимо связать с упругими характеристиками среды и, следуя рассуждениям автора работы [30], получить условие (2.5), обеспечивающее устойчивость численного метода решения нелинейных задач.

Зависимость продольной скорости перемещения  $v_1$  и напряжений  $p+q$ ,  $p-q$  от поперечной координаты  $x_2$  в различных сечениях  $x_1$  тела в различные моменты времени повторяет основные особенности приложения нагрузки, а их зависимость от координаты  $x_1$  монотонно убывает с ростом  $x_1$ . Она приведена на рис. 6 и 7.

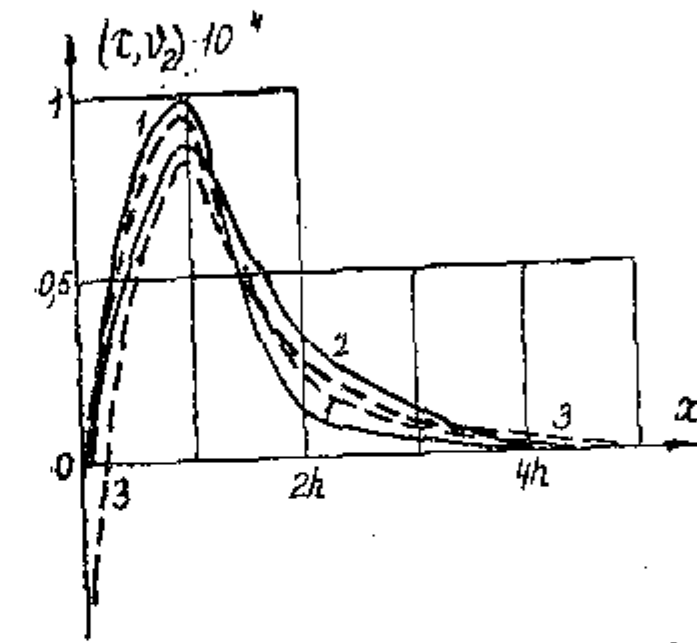


Рис. 8. Зависимость компонент напряжений  $\tau$  (сплошные кривые) и поперечной скорости перемещения  $v_2$  (пунктирная кривая) от координаты  $x_1$  в сечениях  $x_2=10h$  (1),  $x_2=19h$  (2),  $x_2=20h$  (3)

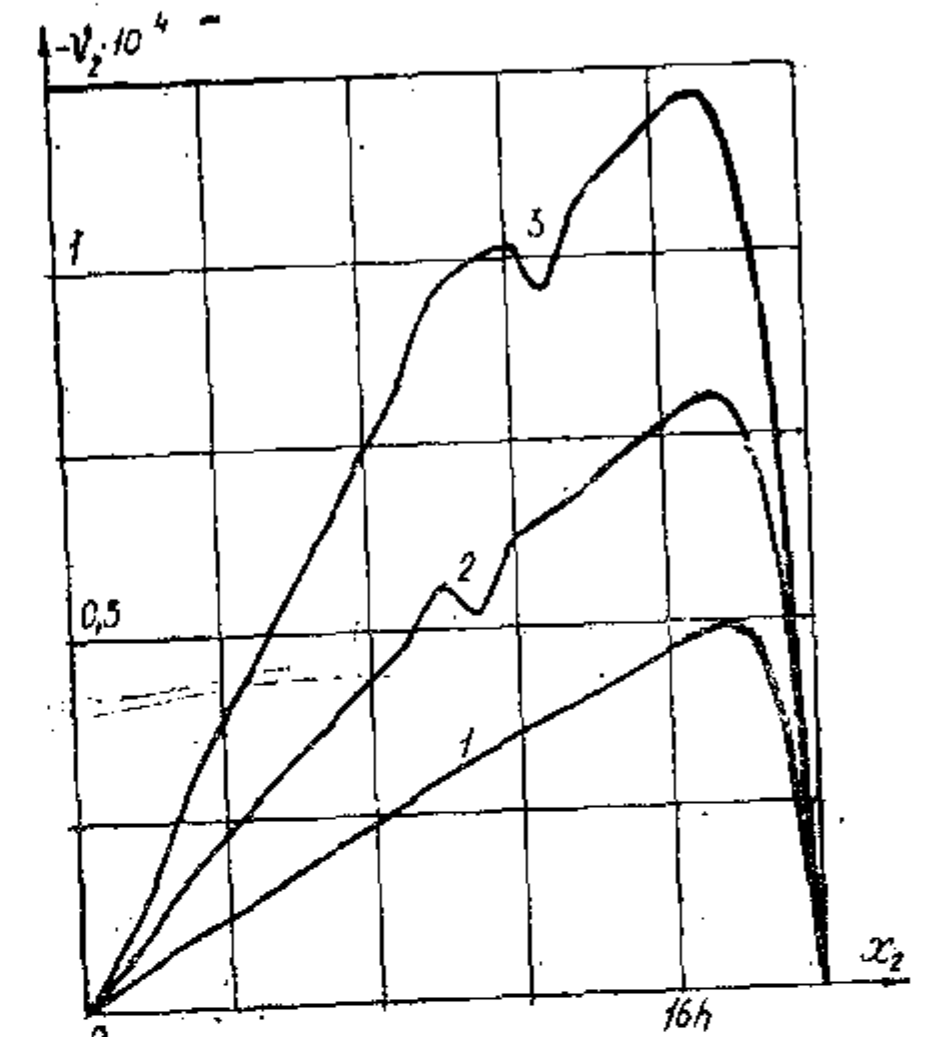


Рис. 9. Зависимость поперечных скоростей перемещения  $v_2$  от координаты  $x_2$  для моментов времени  $t=5k$  (1),  $t=6k$  (2),  $t=7k$  (3)

Характер функциональной связи поперечной скорости  $v_2$  перемещения и касательной  $\tau$  компоненты напряжения с продольной координатой  $x_1$  одинаков (рис. 8). Примечательна их зависимость от поперечной координаты  $x_2$  (рис. 9, 10). В области установившихся упругих или пластических деформаций она описывается достаточно гладкой кривой. В переходной области отмечаются флуктуации в поведении касательного напряжения и поперечной скорости перемещения. Эти изменения, будучи резкими, существенно замедляют процесс сходимости последовательных приближений в используемом методе переменных параметров упругости. Наличие участков резкого изменения  $v_2$  и  $\tau$  обусловлено, во-первых, не-

равномерностью приложенной на границе нагрузки (2.3), когда каждая ее точка становится микроочагом дифрагированных волн — источников касательных напряжений, и, во-вторых, определяющим, на наш взгляд, изменением свойств материала, когда постоянный на упругом участке деформирования

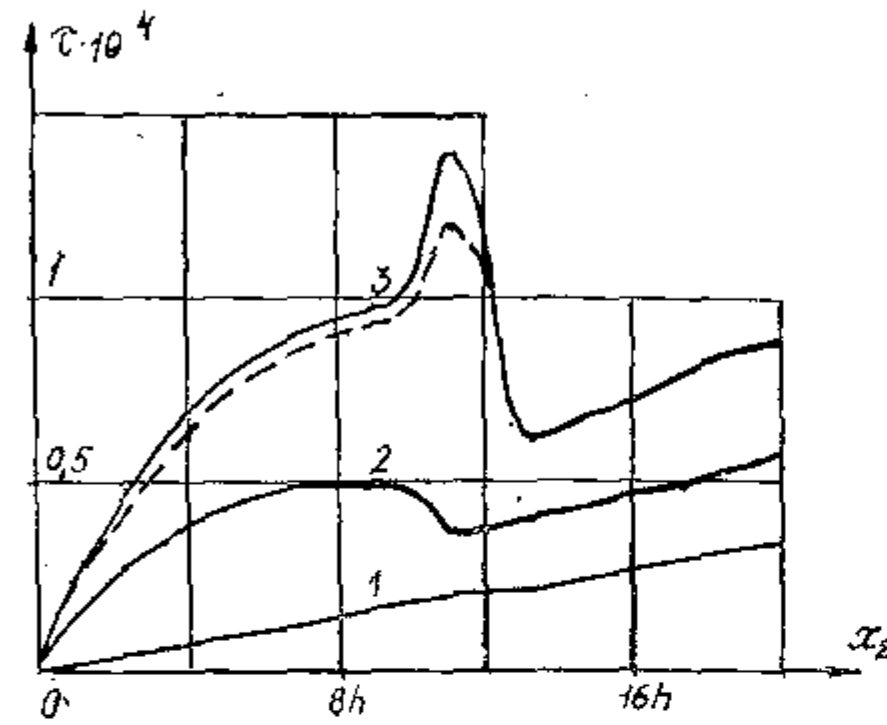


Рис. 10. Зависимость параметра напряжения  $\tau$  от координаты  $x_2$  для моментов времени  $t=5k$  (1),  $t=6k$  (2),  $t=7k$  (3)

Как видно, в области упругих деформаций ( $|x_2| \geq 13h$ ) касательные напряжения совпадают, в пластически деформируемой зоне ( $|x_2| < 13h$ ) они отличаются. Максимальное отличие в точке  $|x_2| = 11h$  соответствует переходной зоне на кривой деформирования  $\sigma_i \sim e_i$  и составляет 14%. Эти данные свидетельствуют о важности выбора оптимальной величины точности расчета  $\epsilon$ . Уменьшение  $\epsilon$  требует большого числа итераций, увеличение его ведет к большой погрешности расчета.

Отметим особенности формирования пластически деформированных зон в задачах динамики. Может случиться, что подобная зона полностью заключена внутри исследуемой области. Такой эффект обнаружен при решении задачи, в которой внешняя нагрузка в виде параболы (2.3) прикладывалась на участке  $|x_2| \leq 2h$ , а другие точки границы  $x_1=0$  свободны. В этом случае касательные напряжения  $\tau$ , обусловленные дифрагированными от точки  $x_1=0$ ,  $|x_2|=2h$  волнами, опреде-

лили максимальную величину интенсивности напряжения во внутренней точке области. Нетрудно построить траекторию нагружения в пространстве напряжений во всех узловых точках рассматриваемой области. Для некоторых узлов они приведены на рис. 11.

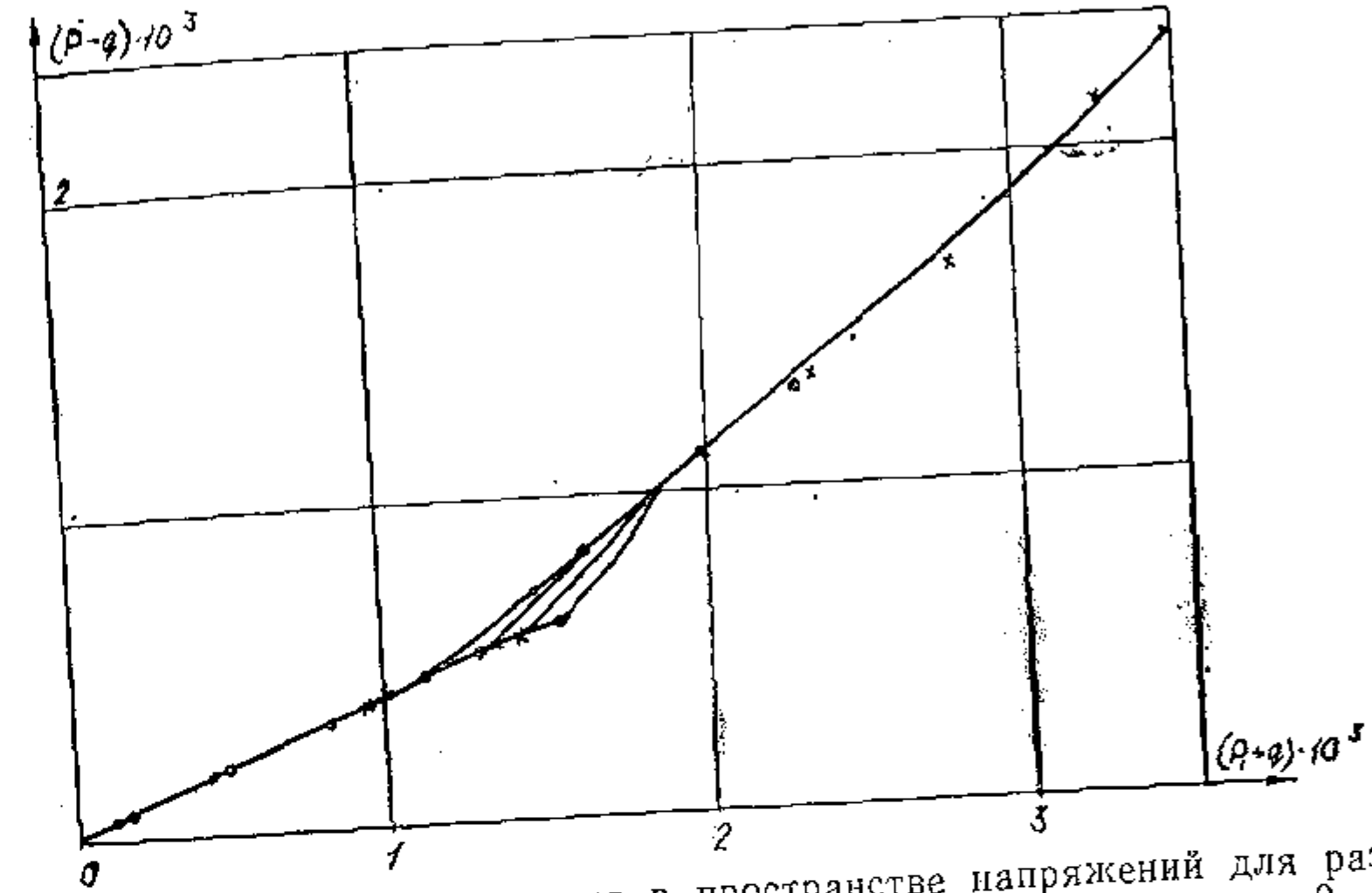


Рис. 11. Траектория нагружения в пространстве напряжений для различных точек исследуемой области: маркеры для точки  $x_1=x_2=0$

Во всех точках траектория нагружения оказывается прямой как на упругом, так и на упрочняющемся участке кривой деформирования  $\sigma_i \sim e_i$ . Между этими участками траектория нагружения в точке плавно изламывается. При этом происходит переход с одной прямой траектории нагружения на другую. Кривая, изображенная на рис. 11, показывает, что при указанном динамическом нагружении реализуется процесс, близкий к простому нагружению [26]. Это говорит о возможности использования деформационной теории при решении задач рассматриваемого типа. Кроме того, алгоритм решения, сочетающий методы переменных параметров упругости и пространственных характеристик, позволил выявить зависимость скорости распространения продольных и поперечных волн от уровня пластической деформации, хотя эти скорости определяются сдвигающимися модулями, соответственно привлекаемым методам решения.