Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева

УДК 512.81 На правах рукописи

БЕЙСЕНБАЕВА КУЛАЙША ШЕРТАЕВНА

Подалгебры и автоморфизмы свободных алгебр Лейбница

6D060100 - Математика

Диссертация на соискание ученой степени
доктора философии (PhD)

Научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор Умирбаев У.У.
Научный консультант
Ph.D, профессор Макар-Лиманов Л.

Республика Казахстан

Астана, 2013

СОДЕРЖАНИЕ

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

k - произвольное поле;

$U \oplus W$ - прямая сумма подпространств U и W векторного пространства V над k;

$T(V)$ - тензорная алгебра векторного пространства V;

$Ann(g)$ - аннуляторный идеал алгебры Лейбница g;

$\overline{g}$ - лиев фактор алгебры Лейбница g, т.е. $\overline{g} = g/Ann(g)$;

$UL(g)$ - универсальная мультипликативная обертывающая алгебра алгебры Лейбница g;

$U(L)$ - универсальная мультипликативная обертывающая алгебра алгебры Ли L;

l_a, r_a - универсальные операторы левого и правого умножения на a;

$LB\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ - свободная алгебра Лейбница со свободными образующими $x_1, x_2, \ldots, x_n$;

$Lie\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ - свободная алгебра Ли со свободными образующими $x_1, x_2, \ldots, x_n$;

$Aut(A)$ - группа всех автоморфизмов алгебры A над полем k;

$Tame(A)$ - группа ручных автоморфизмов свободной алгебры A;

$T(A)$ - группа треугольных автоморфизмов свободной алгебры A;

$ATame(A)$ - группа почти ручных автоморфизмов свободной алгебры A;

$AT(A)$ - группа почти треугольных автоморфизмов свободной алгебры A;

$GL_n(k)$ - общая линейная группа порядка n над k.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Линейное пространство g над полем k, снабженное билинейной операцией $[x, y]$, называется алгеброй Лейбница, если для любых $x, y, z \in g$ выполняется тождество Лейбница

$$[x,[y,z]] = [[x,y],z] - [[x,z],y].$$

Кроме того, если в алгебре g выполняется тождество кососимметричности

$$[x,x] = 0, \ \ x \in g,$$

тогда тождество Лейбница превращается в тождество Якоби и g становится алгеброй Ли. В общем случае класс алгебр Лейбница расширяет класс алгебр Ли и алгебры Лейбница часто называют "некоммутативными алгебрами Ли".

Алгебры Лейбница впервые появились в 1965 году в работе А. Блоха [1] под названием D - алгебр. Позже эти алгебры возникли в работе Ж.-Л. Лодея и Д. Куиллена (J.-L. Loday, D. Quillen) [2] при изучении свойств циклических гомологий и гомологий Хохшильда алгебр матриц и позже были введены Ж.-Л. Лодеем как некоммутативные алгебры Ли [3]. В настоящее время алгебры Лейбница активно исследу ются многими математиками Франции, Германии, России, Италии, Канады, Казахстана, США и т.д.

Работы Ж.-Л. Лодей и Т. Пирашвили (J.-L. Loday, T. Pirashvili) [4], А.А. Михалева, У.У. Умирбаева [5] показали возможность построения интересной комбинаторной теории свободных алгебр Лейбница. В работе Ж.-Л. Лодей и Т. Пирашвили [4] построен простой базис свободной алгебры Лейбница. Этот базис, состоящий из всех правонормированных слов, выглядит гораздо проще, чем известные базисы Холла-Ширшова [6] свободных алгебр Ли.

Многообразия алгебр, в которых подалгебры свободных алгебр свободны, называются шрайеровыми. Известно, что многообразия всех (неассоциативных) алгебр [7], коммутативных и антикоммутативных алгебр [8], алгебр Ли [9 - 10] и алгебр с нулевым умножением являются шрайеровыми. Многообразие алгебр Лейбница не является шрайеровым. Тем не менее, А.А. Михалев, У.У. Умирбаев [5] доказали финитную отделимость подалгебр свободных алгебр Лейбница, откуда следует разрешимость проблемы вхождения для свободных алгебр Лейбница. Там же доказано, что алгебры Лейбница обладают свойством дифференциальной отделимости подалгебр.

Свободное произведение является одним из самых важных конструкций в теории групп. Свободное произведение алгебр Ли впервые было изучено А.И. Ширшовым [11]. В частности, он описал линейный базис свободного произведения двух алгебр Ли.

Исследование проблемы вхождения для свободных алгебр имеет особое значение, так как оно связано с исследованием производных Фокса, гипотезы Якобиана и исследованием ручных и диких автоморфизмов свободных алгебр конечного ранга. Напомним, что разрешимость проблемы вхождения для свободных алгебр Ли вытекает из теоремы А.И. Ширшова [9] о подалгебрах свободных алгебр Ли. М.В. Зайцев [12] доказал, что проблема вхождения для свободных метабелевых алгебр Ли разрешима. Неразрешимость проблемы вхождения для свободных разрешимых алгебр Ли ступени разрешимости ≥ 3 доказана У.У. Умирбаевым [13]. А.Т. Абдыхалыков [14] доказал неразрешимость проблемы вхождения для свободных разрешимых алгебр Лейбница ступени разрешимости ≥ 3.

Автоморфизмы описывают все симметрии алгебраического объекта и связанных с ним геометрических объектов. Поэтому исследование группы автоморфизмов алгебраических систем и геометрических многообразий является одним из важных и перспективных задач современной математики. Свободные алгебры обладают довольно богатой группой ручных автоморфизмов. Вопрос о существовании диких автоморфизмов является весьма трудным.

В 1942 году Х.В.Е. Юнг (H.W.E. Jung) доказал [15], что автоморфизмы алгебры многочленов $k[x,y]$ от двух переменных над полем характеристики 0 являются ручными. В 1953 году В. ван дер Калк (W.van der Kulk) [16] обобщил этот результат для случая произвольной характеристики. В работах А. Чернякевич (A.J. Czerniakiewicz) [17] и Л. Макар-Лиманова [18] доказано, что автоморфизмы свободных ассоциативных алгебр с двумя порождающими являются ручными. Более того, они доказали, что группа автоморфизмов свободной ассоциативной алгебры $k\langle x,y\rangle$ от двух порождающих изоморфна группе автоморфизмов алгебры многочленов $k[x,y]$ от двух переменных. В работе [19] доказано, что автоморфизмы двупорожденных свободных алгебр Пуассона над полем характеристики 0 являются ручными и группа автоморфизмов этой алгебры также изоморфна группе автоморфизмов алгебры многочленов $k[x,y]$. В работах И.П. Шестакова и У.У. Умирбаева [20-23] доказано, что автоморфизм Нагаты [24]

$$\sigma = (x+(x^2-yz)z, y+2(x^2-yz)x+(x^2-yz)^2 z, z)$$

алгебры многочленов $k[x,y,z]$ над полем характеристики 0 является диким. Также У.У. Умирбаевым [25] было доказано, что автоморфизм Аника [26]

$$\delta = (x+z(xz-zy), y+(xz-zy)z, z)$$

свободной ассоциативной алгебры $k\langle x,y,z\rangle$ над полем характеристики 0 является диким. Автоморфизмы Нагаты и Аника становятся ручными после добавления одной новой переменной, т.е. являются стабильно ручными [27].

В 1964 году П. Кон (P. Cohn) [26] доказал, что автоморфизмы конечно порожденных свободных алгебр Ли являются ручными. В случае алгебр Лейбница, А.Т. Абдыхалыков, А.А. Михалев, У.У. Умирбаев [28] обнаружили, что автоморфизм

$$\tau = (x_1 + [[x_2, x_2], x_1], x_2)$$

свободной алгебры Лейбница от двух порождающих является диким. Ввиду вышесказанного становится актуальным вопрос о строении подалгебр свободных алгебр Лейбница и о порождающих группы автоморфизмов свободных алгебр Лейбница конечного ранга.

Цель работы. Данная работа посвящена исследованию автоморфизмов двупорожденных свободных алгебр Лейбница, а также исследованию структуры подалгебр свободных алгебр Лейбница.

Методы исследования. В работе используются методы и результаты теории колец и групп, структурной и комбинаторной теории алгебр Ли.

Основные результаты. Основные результаты диссертационного исследования заключаются в следующем:

- доказано, что правые идеалы свободных алгебр Лейбница, порожденные любым подмножеством множества свободных порождающих этой алгебры, являются свободными алгебрами Лейбница;

- построен линейный базис свободного произведения двух алгебр Лейбница;

- доказана неразрешимость проблемы вхождения для свободного произведения произвольной ненулевой алгебры Лейбница и свободной метабелевой алгебры Ли достаточно большого ранга;

- получено представление группы ручных автоморфизмов свободных алгебр Лейбница от двух порождающих в виде свободного произведения;

- описана структура почти элементарных автоморфизмов свободной алгебры Лейбница;

- доказано, что почти ручные автоморфизмы свободной алгебры Лейбница являются 2 - стабильно ручными;

- получено представление группы почти ручных автоморфизмов свободных алгебр Лейбница от двух порождающих в виде свободного произведения;

- построен пример не почти ручного автоморфизма свободной алгебры Лейбница от двух порождающих.

Научная новизна. Все основные результаты работы являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость. Работа имеет теоретическое значение. Результаты и методы диссертации могут быть использованы для дальнейшего исследования алгебр Лейбница и свободных алгебр, а также при исследовании автоморфизмов свободных алгебр.

Апробация полученных результатов. Результаты диссертации докладывались:

- на алгебраических семинарах кафедры алгебры и геометрии Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева (Астана, 2008-2011гг.);

- на Французско - Казахстанской конференции по теории моделей и алгебре (Астана, 18-22 июля 2005 г.);

- на 10 - ой Межвузовской конференции по математике и механике (Алматы, 2004 г.);

- на алгебраическом семинаре Математического факультета университета Уейн (Детройт, США, апрель 2009 г., март 2010 г.)

- на Международной научной конференции студентов, магистрантов и молодых ученых "Ломоносов - 2011" (Астана, 8 - 9 апреля 2011 г.);

- на Международной научно-практической конференции "Валихановские чтения-15" (Кокшетау, 21 - 24 апреля 2011 г.);

- на четвертом конгрессе Международных математических обществ Тюркского Мира (Баку, Азербайджан, 1 - 3 июля 2011 г.).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации опубликованы в форме статей в отечественных и зарубежных журналах, а также в материалах Международных конференций.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения и трех разделов. Общий объем диссертации составляет 55 страниц. Список литературы, приведенный в конце работы, содержит 47 наименований.

В первом разделе приведены основные определения и собраны сведения, необходимые для дальнейшей работы.

В подразделе 1.1 приведена конструкция свободной алгебры Лейбница и в подразделе 1.2 приведена конструкция универсальной мультипликативной обертывающей алгебры из работы [4].

В подразделе 1.3 приведены определения и теоремы о свободных произведениях в группах и в алгебрах Ли из [29;11].

Во втором разделе рассмотрены подалгебры свободных алгебр Лейбница и свободное произведение алгебр Лейбница. В случае алгебр Ли подалгебры свободных алгебр Ли свободны [9]. Аналог этой теоремы для свободных алгебр Лейбница неверен. Например, подалгебра свободной алгебры $LB\langle x\rangle$, порожденная элементами $[x,x],[[x,x],x]$, является двумерной абелевой, т.е. не является свободной.

Для любой алгебры Лейбница g через $UL(g)$ будем обозначать универсальную обертывающую алгебру алгебры g, а через $Ann(g)$ обозначим идеал алгебры g, порожденный всеми элементами $[x,x]$, где $x \in g$. Идеал $Ann(g)$ называется аннуляторным идеалом алгебры g. Через $\langle f_1, f_2, \ldots, f_k \rangle$ будем обозначать подалгебру алгебры g, порожденную $f_i \in g, \quad 1 \le i \le k.$

Для любого X через $LB\langle X \rangle$ и $Lie\langle X \rangle$ будем обозначать свободную алгебру Лейбница и свободную алгебру Ли со свободным множеством порождающих X, соответственно. Если $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, то будем писать также $LB\langle x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \rangle$ и $Lie\langle x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \rangle$.

Характеризацию свободных алгебр Лейбница дает следующая

Лемма 2.1 Пусть g - алгебра Лейбница, порожденная элементами $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Тогда g является свободной алгеброй Лейбница со свободными порождающими $z_1, z_2, \ldots, z_n$ в том и только в том случае, если выполняются следующие условия:

1) $\overline{g} = g/Ann(g) = Lie\langle \overline{z_1}, \overline{z_2}, \ldots, \overline{z_n} \rangle$;
2) $g = z_1 U(\overline{g}) \oplus z_2 U(\overline{g}) \oplus \ldots \oplus z_n U(\overline{g})$.

В подразделе 2.1 доказана также

Теорема 2.1 Пусть X - произвольное множество переменных и $Y \subseteq X$. Тогда правый идеал свободной алгебры Лейбница $LB\langle X \rangle$, порожденный множеством Y, является свободной алгеброй Лейбница.

В подразделе 2.2 исследованы свободные произведения алгебр Лейбница. Напомним, что алгебра Лейбница C называется свободным произведением алгебр Лейбница A и B, если имеется пара гомоморфизмов $\alpha : A \to C$ и $\beta : B \to C$ такая, что для любой алгебры Лейбница L и для любой пары гомоморфизмов $\alpha' : A \to L$ и $\beta' : B \to L$ существует единственный гомоморфизм $\omega : C \to L$ такой, что $\omega\alpha = \alpha'$ и $\omega\beta = \beta'$. В этом случае мы пишем $C = A * B$ и α, β назовем каноническими гомоморфизмами.

Пусть A - алгебра Лейбница. Тогда $\overline{A} = A/Ann(A)$ является алгеброй Ли, где $Ann(A)$ аннуляторный идеал алгебры A. Линейный базис $s(A) = s_0(A) \cup s_1(A)$ алгебры Лейбница A называется специальным базисом, если $s_1(A)$ является линейным базисом $Ann(A)$ и $s(A)$ снабжен линейным порядком $\leq$ таким, что $x < y$ для любого $x \in s_1(A), y \in s_0(A)$. Заметим что, если $s(A)$ является специальным базисом алгебры A, то $\overline{s_0(A)} = \{\overline{x} \mid x \in s_0(A)\}$ является линейным базисом алгебры Ли $\overline{A}$.

Пусть A и B - произвольные алгебры Лейбница над полем k и пусть $s(A) = s_0(A) \cup s_1(A)$, $s(B) = s_0(B) \cup s_1(B)$ - специальные базисы алгебр A и B соответственно.

Рассмотрим алфавит $s(A) \cup s(B)$. Будем говорить, что $x, y \in s(A) \cup s(B)$ не сравнимые, если x и y оба не принадлежат одному и тому же множеству $s(A)$ или $s(B)$. Неассоциативное слово вида

$$[\ldots[[x_i, x_{i_1}], x_{i_2}], \ldots, x_{i_k}], \quad k \geq 0,$$

с правонормированной расстановкой скобок в алфавите $s(A) \cup s(B)$ называется специальным, если $x_{i_j} \in s_0(A) \cup s_0(B)$ для всех $1 \leq j \leq k$, x_i и x_{i_1} не являются сравнимыми, и для всех $1 < j \leq k$ элементы $x_{i_{j-1}}$ и x_{i_j} не являются сравнимыми или $x_{i_{j-1}} \leq x_{i_j}$.

Линейный базис свободного произведения двух алгебр Лейбница описывает

Теорема 2.2 Пусть A и B - произвольные алгебры Лейбница над полем k и $s(A) = s_0(A) \cup s_1(A)$, $s(B) = s_0(B) \cup s_1(B)$ их специальные базисы, соответственно. Множество всех специальных слов в алфавите $s(A) \cup s(B)$ составляет линейный базис свободного произведения $A * B$.

Напомним, что проблема вхождения (в конечно порожденные подалгебры) разрешима для алгебры A, если существует эффективная процедура, определяющая для любого элемента $a \in A$ и для любой конечно порожденной подалгебры B алгебры A принадлежит ли элемент a подалгебре B или нет. В противном случае говорят, что проблема вхождения для алгебры A неразрешима.

К.А. Михайловой [30] было доказано, что если двух группах разрешима проблема вхождения, то она разрешима и в их свободном произведении. Аналог этого результата неверен для алгебр Ли. В 1993 году У.У. Умирбаев [13] доказал неразрешимость проблемы вхождения для свободного произведения одномерной алгебры Ли и свободной метабелевой алгебры Ли достаточно большого ранга. Условие о ранге связано с интерпретатацией машин Минского. Как отмечено выше, разрешимость проблемы вхождения для свободных метабелевых алгебр Ли доказана М.В. Зайцевым [12]. В подразделе 2.2 используя результаты и методы работы [13], доказана следующая

Теорема 2.3 Пусть A- произвольная ненулевая алгебра Лейбница и L- свободная метабелева алгебра Ли достаточно большого ранга. Тогда проблема вхождения в подалгебры для свободного произведения $A*L$ алгоритмически неразрешима.

Третий раздел посвещен исследованию автоморфизмов свободных алгебр Лейбница. Вопрос о существовании диких автоморфизмов конечно порожденных свободных алгебр всегда представляется очень интересным и сложным.

Пусть M- некоторое многообразие линейных алгебр над полем k и $\Lambda = k_{\mathrm{M}}\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$ - свободная алгебра этого многообразия со свободными порождающими $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Автоморфизм φ алгебры Λ называется элементарным, если найдется i такое, что

$$\varphi(x_i) = \alpha x_i + f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n), 0 \neq \alpha \in k,$$

$$\varphi(x_j) = x_j,\ j \neq i, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Автоморфизм ϕ алгебры Λ называется ручным, если он является произведением элементарных автоморфизмов. Не ручные автоморфизмы называются дикими.

Х. Юнг [15] и В. ван дер Калк [16] доказали, что автоморфизмы алгебры многочленов $k[x, y]$ от двух переменных x, y над полем k являются ручными. Другими словами, группа $Aut(k[x, y])$ порождается подгруппами A аффинных автоморфизмов

$$\alpha = (a_1x + b_1y + c_1, a_2x + b_2y + c_2), \quad a_i, b_i, c_i \in k, \quad a_1b_2 \neq a_2b_1,$$

и B треугольных автоморфизмов

$$\beta = (ax + h(y), by + b_1), \quad 0 \neq a, b, \in k, \quad b_1 \in k, \quad h(y) \in k[y].$$

Более того, группа $Aut(k[x, y])$ представляется в виде

$$Aut(k[x, y]) = A *_C B,$$

где $A *_C B$ - свободное произведение подгрупп A и B с объединенной подгруппой $C = A \cap B$ [16].

Группу $GL_n(k)$ как обычно, отождествляем с группой линейных автоморфизмов.

В подразделе 3.1 доказана следующая

Теорема 3.1 Пусть $A = LB\langle x, y\rangle$ - свободная алгебра Лейбница от двух переменных. Группа ручных автоморфизмов свободной алгебры Лейбница A является свободным произведением подгрупп линейных автоморфизмов $GL_2(k)$ и треугольных автоморфизмов $T(A)$ с объединенной подгруппой $C = GL_2(k) \cap T(A)$, т.е.

$$Tame(A) = GL_2(k) *_C T(A).$$

Почти элементарные автоморфизмы встречались в работе [31] при изучении автоморфизмов свободных метабелевых групп от трех порождающих.

Пусть $\Lambda = LB\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$ - свободная алгебра Лейбница со свободными образующими $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Через Λ_r обозначим правый идеал алгебры Λ, порожденный элементами вида x_i, $1 \le i \le r$. Следующая лемма дает описание почти элементарных автоморфизмов свободной алгебры Лейбница Λ

Лемма 3.5 Пусть φ - эндоморфизм алгебры Λ такой, что $\varphi(x_i) = x_i$ при $i \le n-1$ и $\varphi(x_n) = f$. Тогда φ является автоморфизмом алгебры Λ тогда и только тогда, когда

$$f = \alpha x_n + g + h$$

где $0 \ne \alpha \in k, \quad g \in \langle x_1, x_2, \ldots x_{n-1}\rangle, \quad h \in Ann(\Lambda_{n-1})$.

Автоморфизм φ алгебры Λ назовем k - стабильно ручным, если автоморфизм ψ алгебры $LB\langle x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_k\rangle$, определенный правилом $\psi(x_i) = \varphi(x_i),\ \psi(y_j) = y_j$ для всех $i, j,$ является ручным.

В подразделе 3.2 доказана следующая

Теорема 3.2 Любой почти ручной автоморфизм свободной алгебры Лейбница конечного ранга является 2 - стабильно ручным.

Аналог теоремы 3.1 для группы почти ручных автоморфизмов двупорожденной свободной алгебры Лейбница доказан в подразделе 3.3.

Теорема 3.3 Пусть $A = LB\langle x, y\rangle$ - свободная алгебра Лейбница от двух переменных. Группа почти ручных автоморфизмов свободной алгебры Лейбница A является свободным произведением подгрупп линейных автоморфизмов $GL_2(k)$ и почти треугольных автоморфизмов $AT(A)$ с объединенной подгруппой $H = GL_2(k) \cap AT(A)$, т.е.

$$ATame(A) = GL_2(k) *_H AT(A).$$

В подразделе 3.4 построен пример не почти ручного автоморфизма свободных алгебр Лейбница от двух переменных. Изучение автоморфизмов свободных алгебр тесно связано с изучением локально-нильпотентных дифференцирований. Напомним, что дифференцирование ∂ алгебры A называется локально-нильпотентным, если для любого $a \in A$ существует натуральное число $n = n(a)$ такое, что $\partial^n(a) = 0$.

Рассмотрим дифференцирование ∂ двупорожденной свободной алгебры Лейбница A, определяемое правилом

$$\partial(x) = f,\ \partial(y) = g,$$

где

$$f = [[[x,x],[[y,x],x]],x] - [[[[y,x],x],[[y,x],x]],x]$$

$$g = [[x,x],[[y,x],x]] - [[[y,x],x],[[y,x],x]].$$

Заметим, что $f, g \in Ann(A)$ и $f = [g, x]$. Несложно показать, что f и g ненулевые элементы и $\deg f = 7$, $\deg g = 6$. Прямые вычисления дают $\partial^2(x) = 0$ и $\partial^2(y) = 0$, т.е., ∂ является локально - нильпотентным. Кроме того, $\partial^2 = 0$ поскольку $f, g \in Ann(A)$. Следовательно,

$$\delta = \exp(\partial) = id + \partial = (x + f, y + g)$$

является автоморфизмом алгебры A.

Теорема 3.4 Автоморфизм δ двупорожденной свободной алгебры Лейбница $A = LB\langle x, y\rangle$ не является почти ручным.

Автор глубоко признателен своему научному руководителю профессору Умирбаеву Уалбаю Утмаханбетовичу за постановку задач, неоценимую помощь при работе над диссертацией и поддержку, а также выражает благодарность своему научному консультанту профессору Л. Макар-Лиманову за полезные советы при работе над диссертацией.

1 ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В этом разделе приведены основные определения, обозначения и собраны сведения, необходимые для дальнейшей работы. В подразделе 1.1 изложена конструкция свободной алгебры Лейбница. В подразделе 1.2 изложена конструкция универсальной мультипликативной обертывающей алгебры алгебр Лейбница. В подразделе 1.3 приведены некоторые определения и теоремы о свободных произведениях в группах и в алгебрах Ли из [29;11].

1.1 Некоторые конструкции алгебры Лейбница

Векторное пространство g над полем k, снабженное билинейной операцией

$$[-,-]: g \times g \to g$$

называется алгеброй Лейбница, если выполняется тождество Лейбница

$$[x,[y,z]] = [[x,y],z] - [[x,z],y]. \qquad (1.1)$$

Для любой алгебры Лейбница g через $Ann(g)$ будем обозначать идеал алгебры g, порожденный всеми элементами $[x,x]$, где $x \in g$. Идеал $Ann(g)$ называется аннуляторным идеалом алгебры g. Действительно, из тождества (1.1) легко выводится равенство

$$[g, Ann(g)] = 0,$$

что и оправдывает название идеала $Ann(g)$.

Алгебра Лейбница g является алгеброй Ли, если выполняется условие

$$[x,x] = 0, x \in g.$$

Заметим, что из этого условия следует тождество кососимметричности:

$$[x,y] + [y,x] = 0.$$

Тогда тождество Лейбница превращается в тождеству Якоби. Таким образом, любая алгебра Ли является алгеброй Лейбница.

Напомним, что алгебра Λ называется *свободной алгеброй Лейбница со свободным множеством порождающих* $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots\}$, если выполняются следующие два условия:

1) алгебра Λ порождается (как алгебра Лейбница) множеством X;

2) для любой алгебры Лейбница B и для любого отображени $\varphi: X \to B$ существует единственный гомоморфизм $\psi: \Lambda \to B$ такой, что $\psi|_X = \varphi$.

Пусть V - произвольное векторное пространство над полем k. Напомним, что тензорной алгеброй векторного пространства V называется алгебра

$$T(V) = k \cdot 1 \oplus V \oplus V^{\otimes 2} \oplus \ldots \oplus V^{\otimes n} \oplus \ldots,$$

снабженная умножением

$$u \cdot v = u \otimes v \in V^{\otimes(i+j)},$$

где $u \in V^{\otimes i}$, $v \in V^{\otimes j}$. Заметим, что $T(V)$ является свободной ассоциативной алгеброй над V.

Лемма 1.1 *Пространство* $\overline{T}(V) = V \oplus V^{\otimes 2} \oplus \ldots \oplus V^{\otimes n} \oplus \ldots$ *с бинарной операцией* $[-,-]$*, определенной индуктивно (по длине второй компоненты) по правилам*

$$[x,v] = x \otimes v, \quad x \in \overline{T}(V),\ v \in V,$$

$$[x, y \otimes v] = [x,y] \otimes v - [x \otimes v, y],\ x, y \in \overline{T}(V),\ v \in V$$

является свободной алгеброй Лейбница над V.

Если множество X составляет базис пространства V, то $\overline{T}(V)$ становится свободной алгеброй Лейбница со свободным множеством порождающих X.

Следствие 1.1 *Пусть* $\Lambda = LB\langle X \rangle$ *- свободная алгебра Лейбница со свободным множеством порождающих* $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$*. Тогда базис алгебры* Λ *составляют все правонормированные слова в алфавите* X*, т.е. слова вида*

$$[\ldots[[x_{i_1}, x_{i_2}], x_{i_3}], \ldots x_{i_k}].$$

Доказательство леммы 1.1 и его следствия 1.1 можно найти в работе [4].

1.2 Базис универсальной мультипликативной обертывающей алгебры

Напомним, что векторное пространство L над полем k, снабженное билинейной операцией $[x,y]$ называется алгеброй Ли, если выполняются тождество:

$$[x,x]=0,$$

$$[[x,y],z]+[[y,z],x]+[[z,x],y]=0.$$

Пусть A- ассоциативная алгебра над полем k. В алгебре A определим операцию $[\cdot,\cdot]$ положив

$$[x,y]=xy-yx,\ x,y\in A.$$

Элемент $[x,y]$ алгебры A называется *коммутатором* элементов x и y. Через $A^{(-)}$ обозначим коммутаторную алгебру Ли [6] ассоциативной алгебры A.

Пусть L - алгебра Ли. Ассоциативная алгебра $U=U(L)$ с единицей называется универсальной обертывающей для алгебры L, если

1) существует гомоморфизм алгебр Ли $\varepsilon: L\to U^{(-)}$;

2) для любой ассоциативной алгебры B с единицей и для любого гомоморфизма $\varphi: L\to B^{(-)}$ существует единственный гомоморфизм $\psi: U\to B$ ассоциативных алгебр с единицей такой, что $\psi\varepsilon=\varphi$.

Теорема 1.1 (Пуанкаре-Биркгоф-Витт). Пусть L - алгебра Ли и $x_1,x_2,\ldots,x_n$ - базис пространства L. Тогда ассоциативные слова вида

$$x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n},\ i_1\ge i_2\ge\ldots\ge i_n,$$

образуют базис универсальной обертывающей алгебры $U(L)$.

Пусть g - произвольная алгебра Лейбница и M - произвольный g-бимодуль, т.е. определены билинейные отображения

$$M\times g\to M,\ (m,x)\mapsto[m,x],$$

$$g\times M\to M,\ (x,m)\mapsto[x,m],$$

где $m \in M, x \in g$. Пространство $g \oplus M$ превращается в алгебру относительно умножения

$$[x_1 + m_1, x_2 + m_2] = [x_1, x_2] + [x_1, m_2] + [m_1, x_2].$$

где $x_1, x_2 \in g, m_1, m_2 \in M$. Напомним, что g-бимодуль M называется лейбницевым g-бимодулем, если алгебра $g \oplus M$ является алгеброй Лейбница. Следовательно, g-бимодуль M является лейбницевым тогда и только тогда, когда для всех $m \in M$ и $x, y \in g$ выполняются равенства

$$[m,[x, y]] = [[m, x], y] - [[m, y], x],$$

$$[x,[m, y]] = [[x, m], y] - [[x, y], m],$$

$$[x,[y, m]] = [[x, y], m] - [[x, m], y].$$

Известно [32], что универсальные операторы правого и левого умножения r_a, l_a, где $a \in g$, определяют действия

$$r_x : M \to M \ (m \cdot r_x = [m, x])$$

$$l_x : M \to M \ (m \cdot l_x = [x, m]) \tag{1.2}$$

на любом лейбницевым модуле M. Тогда определяющие соотношения g-бимодуля можно записывать в виде

$$r_{[x,y]} = r_x r_y - r_y r_x, \tag{1.3}$$

$$l_{[x,y]} = l_x r_y - r_y l_x, \tag{1.4}$$

$$l_{[x,y]} = l_y l_x + l_x r_y. \tag{1.5}$$

Из двух последних соотношений следует, что

$$(r_b + l_b) l_a = 0. \tag{1.6}$$

Через $UL(g)$ обозначим универсальную мултипликативную обертывающую алгебру алгебры g. По определению [32], универсальная мультипликативная обертывающая алгебра $UL(g)$ алгебры Лейбница g является ассоциативной алгеброй с единицей с порождающими $\{r_x \mid x \in g\}$, $\{l_x \mid x \in g\}$ и определяющими соотношениями (1.3) - (1.5). В [32] доказано, что любой правый $UL(g)$ - модуль M превращается согласно (1.2) в лейбницевый g-бимодуль, и обратно, любой лейбницевый g-бимодуль M превращается в правый $UL(g)$ модуль, т.е. категории правых $UL(g)$ модулей и лейбницевых g-бимодулей эквивалентны.

Легко проверить, что если $x \in Ann(g)$, то $r_x = 0$. Следовательно, $Ann(g)$ является правым идеалом алгебры g, порожденным всеми элементами $[x, x]$, где $x \in g$. Фактор алгебра $\overline{g} = g/Ann(g)$ является наибольшим лиев гомоморфным образом алгебры g. Образ элемента $x \in g$ в $\overline{g}$ будем обозначать через $\overline{x}$. Через $U(\overline{g})$ обозначим универсальную ассоциативную обертывающую алгебру алгебры Ли $\overline{g}$.

Пусть A^0 - базис пространства $Ann(g)$. Дополним это множество до базиса $A \cup A^0$ пространства g. Тогда $\overline{A} = \{\overline{a} \mid a \in g\}$ составляет базис пространства $\overline{g}$. Согласно теореме Пуанкаре - Биркгофа - Витта алгебра $U(\overline{g})$ имеет базис, состоящий из слов вида

$$w = \overline{a}_1 \overline{a}_2 \ldots \overline{a}_n,$$

где $a_i \in A, 1 \le i \le n, a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$. Следующее утверждение доказано [4;5].

Следствие 1.2 *Слова вида*

$$l_x r_{a_1} r_{a_2} \ldots r_{a_n},$$

где $x \in A \cup A^0$ *составляют базис алгебры* $UL(g)$.

1.3 Свободное произведение в группах и в алгебрах Ли

Свободным произведением групп G_1 и G_2 называется группа $G = G_1 * G_2$, удовлетворяющая следующим двум условиям:

(a) G_1 и G_2 являются подгруппами группы G, $G_1 \cap G_2 = 1$ и G порождается этими подгруппами;

(b) Любые гомоморфизмы $G_1 \to A$ и $G_2 \to B$ в подгруппы A и B

произвольной группы H однозначно продолжаются до гомоморфизма $G \to H$.

Группы G_1 и G_2 называются *свободными множителями группы* $G_1 * G_2$. Аналогично может быть определено свободное произведение произвольного количества групп. На языке порождающих и определяющих соотношений группа $G_1 * G_2$ определяется следующим способом:

(a) $G_1 * G_2$ порождается множествами G_1, G_2 и $G_1 \cap G_2 = 1$;

(b) определяющие соотношения группы $G_1 * G_2$ состоят только из определяющих соотношений групп G_1 и G_2.

Более общим является понятие свободного произведения с объединенной подгруппой. Пусть G группа, G_0, G_1, G_2 подгруппы группы G, причем $G_0 = G_1 \cap G_2$. Группа G называется *свободным произведением подгрупп* G_1 *и* G_2 *с объединенной подгруппой* G_0, если

(a) G порождается подгруппами G_1 и G_2;

(b) определяющие соотношения группы G состоят только из определяющих соотношений подгрупп G_1 и G_2.

В этом случае пишем $G = G_1 *_{G_0} G_2$. Очевидно, если $G_0 = 1$, то $G = G_1 * G_2$.

Следующая классическая теорема описывает структуру элементов свободных произведений групп [29].

Теорема 1.2 *Пусть* S_1 *- система левых представителей* G_1 *по* G_0, S_2 *- система левых представителей* G_2 *по* G_0. *Тогда группа* G *является свободным произведением подгрупп* G_1 *и* G_2 *с объединенной подгруппой* G_0 *в том и только в том случае, когда каждый* $g \in G$ *однозначно представляется в виде*

$$g = g_1 \ldots g_k c$$

где $g_i \in S_1 \cup S_2$, $i = 1,\ldots,k$, g_i, g_{i+1} *одновременно не принадлежат* S_1 *или* S_2, $c \in G_0$.

Следствие 1.3 *Пусть* G_1 *и* G_2 *подгруппы группы* G *и* $G_1 \cap G_2 = 1$, *и пусть каждый элемент из* G *однозначно представляется в виде произведения*

$$g = g_1 g_2 \cdots g_n,$$

где $g_i \neq 1$, g_i *лежит в* G_1 *или в* G_2 *и* g_i, g_{i+1} *не лежат одновременно в* G_1 *или в*

G_2. *Тогда* G *является свободным произведением групп* G_1 *и* G_2.

Представление свободного произведения на языке порождающих и определяющих соотношений позволят легко определить свободные произведения для любых многообразий алгебр. Однако не всегда удается получить такие структурные теоремы как в случае групп. В 1962 году А.И. Ширшов [11] изучил свободные произведения в многообразии алгебр Ли и построил базис свободного произведения алгебр Ли. Алгебра Ли L называется *свободным произведением* подалгебр L_1 и L_2, если

(a) L порождается подалгебрами L_1 и L_2 и $L_1 \cap L_2 = 0$;

(b) определяющие соотношения алгебры L состоят только из определяющих соотношений подалгебр L_1 и L_2.

Пусть L_1, L_2 - произвольные алгебры Ли и пусть L - их свободное произведение в многообразии алгебр Ли. Выберем линейные базисы X_1 и X_2 алгебр L_1 и L_2, соответственно. Положим $X = X_1 \cup X_2$. Рассмотрим свободную алгебру Ли G со свободным множеством порождающих X. Имеется очевидный гомоморфизм $G \to L$ тождественный на X. Выберем линейный порядок $\leq$ на X такой, что $x_1 < x_2$ для любых $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$. Выберем линейный базис B (Холла-Ширшова [33] или Ширшова-Линдона [34]) свободной алгебры Ли G. Базисное слово $w \in B$ назовем особым, если оно не содержит подслово вида $[x_2, x_1]$, где $x_1, x_2 \in X_1$ или $x_1, x_2 \in X_2$ (операция умножения в алгебре G обозначена коммутатором).

В работе [11] доказана следующая

Теорема 1.3 *Образы особых слов образуют базу алгебры* L.

В случае алгебр Лейбница следует начать с точного формального определения. Алгебра Лейбница C называется *свободным произведением* алгебр Лейбница A и B, если имеется пара гомоморфизмов $\alpha : A \to C$ и $\beta : B \to C$ такая, что для любой алгебры Лейбница L и для любой пары гомоморфизмов $\alpha' : A \to L$ и $\beta' : B \to L$ существует единственный гомоморфизм $\omega : C \to L$ такой, что $\omega\alpha = \alpha'$ и $\omega\beta = \beta'$. В этом случае мы пишем $C = A * B$ и α, β назовем *каноническими гомоморфизмами*.

2 ПОДАЛГЕБРЫ СВОБОДНЫХ АЛГЕБР ЛЕЙБНИЦА И СВОБОДНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ АЛГЕБР ЛЕЙБНИЦА

В этом разделе рассмотрены свободные подалгебры и свободное произведение алгебр Лейбница. В работе [35] доказано, что двупорожденные подалгебры свободных правосимметричных алгебр свободны. В случае алгебр Ли подалгебры свободных алгебр Ли свободны [34]. Аналог этой теоремы для свободных алгебр Лейбница неверен. Например, подалгебра свободной алгебры $LB\langle X\rangle$, порожденная элементами $[x,x],[[x,x],x]$, является двумерной абелевой, т.е. не является свободной. В подразделе 2.1 мы опишем некоторые свободные подалгебры свободных алгебр Лейбница.

Свободное произведение является одним из самых важных конструкций в теории групп. К.А. Михайловой [30] было доказано, что если две группы имеют разрешимую проблему вхождения, то их свободное произведение также имеет разрешимую проблему вхождения. Свободное произведение алгебр Ли впервые было изучено А.И. Ширшовым [11], который построил базис свободного произведения алгебр Ли. Аналог теоремы К.А. Михайловой [30] для алгебр Ли оказался неверным. У.У. Умирбаев [13] доказал неразрешимость проблемы вхождения для свободного произведения одномерной алгебры Ли и свободной метабелевой алгебры Ли достаточно большого ранга. Напомним, что проблема вхождения для свободных метабелевых алгебр Ли разрешима [12].

В подразделе 2.2 описан линейный базис свободного произведения $A*B$ двух алгебр Лейбница A и B в многообразии алгебр Лейбница. Доказано, что проблема вхождения неразрешима для свободного произведения произвольной ненулевой алгебры Лейбница и свободной метабелевой алгебры Ли достаточно большого ранга. Таким образом, существуют алгебры Лейбница A и B с разрешимой проблемой вхождения такие, что $A*B$ имеет неразрешимую проблему вхождения.

2.1 Некоторые свободные подалгебры свободных алгебр Лейбница

Пусть $\Lambda = LB < x_1, x_2, \dots, x_n >$ - свободная алгебра Лейбница со свободными образующими $x_1, x_2, \dots, x_n$. Известно, что базис алгебры Λ состоит [4] из слов вида

$$[\dots[[x_{i_1}, x_{i_2}], x_{i_3}], \dots, x_{i_k}]. \tag{2.1}$$

В этом случае $L = \Lambda / Ann(\Lambda)$ является свободной алгеброй Ли и свободные образующие этой алгебры будем обозначать через $y_1, y_2, \dots, y_n$. Хорошо известно [34], что $U(L)$ является свободной ассоциативной алгеброй от переменных $y_1, y_2, \dots, y_n$. Заметим, что

$$\Lambda = x_1U(L) \oplus x_2U(L) \oplus \ldots \oplus x_nU(L), \qquad (2.2)$$

т.е. Λ является свободным правым $U(L)$-модулем с базой $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Напомним, что $Lie\langle z_1, z_2, \ldots, z_n \rangle$ обозначает свободную алгебру Ли от свободных порождающих $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Характеризацию свободных алгебр Лейбница дает следующая

Лемма 2.1 *Пусть g - алгебра Лейбница, порожденная элементами $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Тогда g является свободной алгеброй Лейбница со свободными порождающими $z_1, z_2, \ldots, z_n$ если и только если выполняются следующие условия:*

1. $\overline{g} = g/Ann(g) = Lie < \overline{z_1}, \overline{z_2}, \ldots, \overline{z_n} >$;
2. $g = z_1U(\overline{g}) \oplus z_2U(\overline{g}) \oplus \ldots \oplus z_nU(\overline{g})$.

Доказательство. Необходимость условий 1, 2 замечена выше. Если выполнены условия 1, 2, то очевидно, базис g состоит из слов вида

$$[\ldots[[z_{i_1}, z_{i_2}], z_{i_3}], \ldots, z_{i_k}].$$

Рассмотрим гомоморфизм $\varphi : \Lambda = LB < x_1, x_2, \ldots, x_n > \to g$ такой, что $\varphi(x_i) = z_i$, $1 \le i \le n$. Сравнивая базис (2.1) алгебры Λ и базис алгебры g заключаем, что φ - изоморфизм. □

Через Λ_r обозначим правый идеал алгебры $\Lambda = LB < x_1, x_2, \ldots, x_n >$ порожденный элементами вида x_i, $1 \le i \le r$, т.е.

$$\Lambda_r = x_1U(L) \oplus x_2U(L) \oplus \ldots \oplus x_rU(L).$$

Пусть L_r - гомоморфный образ алгебры Λ_r в L. Тогда L_r является идеалом алгебры L, порожденным элементами $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Следовательно,

$$L/L_r \cong Lie\langle y_{r+1}, y_{r+2}, \ldots, y_n \rangle.$$

Выберем линейный базис алгебры $Lie\langle y_{r+1}, y_{r+2}, \ldots, y_n \rangle$, состоящий из правильных слов [34]

$$c_1, c_2, \ldots, c_k, \ldots, \tag{2.3}$$

причем, если $i \le j$, то $d(c_i) \le d(c_j)$. Тогда слова вида

$$r_{c_{i_1}} r_{c_{i_2}} \ldots r_{c_{i_s}}, \ i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_s \tag{2.4}$$

составляют базис алгебры $U(L/L_r)$.
Теперь рассмотрим множество элементов вида

$$x_i w, \tag{2.5}$$

где $1 \le i \le r,\ w$ - слова вида (2.4).

Лемма 2.2 *Алгебра* Λ_r *является свободной алгеброй Лейбница со свободным множеством порождающих (2.5).*

Доказательство. Известно [34], что образы элементов (2.5) в L свободно порождают подалгебру L_r. Поскольку

$$L = Lie < y_{r+1}, y_{r+2}, \ldots, y_n > \oplus L_r,\ L/L_r \cong Lie < y_{r+1}, \ldots, y_n >,$$

то имеем

$$U(L) = \sum_w \oplus w U(L_r),$$

где w - пробегает множество элементов вида (2.4). Тогда

$$\Lambda_r = \sum_{i=1}^{r} \sum_w \oplus x_i w U(L_r).$$

Отсюда вытекает, что элементы (2.5) независимы справа над $U(L_r)$. Применяя лемму 2.1, получаем утверждение леммы 2.2. □

Теорема 2.1 *Пусть* X *- произвольное множество переменных и* $Y \subseteq X$. *Тогда правый идеал свободной алгебры Лейбница* $LB\langle X \rangle$, *порожденный множеством* Y, *является свободной алгеброй Лейбница.*

Доказательство. Пусть A_Y - правый идеал алгебры $LB\langle X\rangle$, порожденный множеством Y. Легко проверить, что алгебра A_Y порождается множеством

$$yw, \tag{2.6}$$

где $y \in Y$, w - пробегает базис алгебры $U(Lie\langle X \setminus Y\rangle)$, построенный также, как и базис (2.4). Так как в силу леммы 2.2 слова вида (2.5) алгебраически независимы, то любое конечное подмножество элементов множества (2.6) алгебраически независимо. Следовательно, множество элементов (2.6) алгебраически независимы. Это означает, что A_Y является свободной алгеброй Лейбница со свободным множеством порождающих (2.6).□

Лемма 2.3 *Если* $a \in Ann(\Lambda)$*, то* a *представляется линейной комбинацией элементов вида* $[u,u]$*, где* $u \in \Lambda$.

Доказательство. Если $u, v \in \Lambda$, то положим

$$u \circ v = [u,v] + [v,u].$$

Поскольку

$$u \circ v = [u+v, u+v] - [u,u] - [v,v],$$

то достаточно доказать, что a является линейной комбинацией элементов вида $[u,u]$, $u \circ v$, где u, v - слова вида (2.4). Из тождества Лейбница (1.1) непосредственно вытекают соотношения

$$[[u,u],x] = [u,[u,x]] + [[u,x],u] = [u,x] \circ u,$$

$$[u \circ v, x] = [u,x] \circ v + u \circ [v,x].$$

Поскольку $Ann(\Lambda)$ как правый идеал порождается элементами вида $[u,u]$, $u \circ v$, то из этих соотношений следует, что a является линейной комбинацией элементов указанного вида.□

Лемма 2.4 $Ann(\Lambda) \bigcap \Lambda_r = Ann(\Lambda_r)$

Доказательство. Очевидно $Ann(\Lambda_r) \subseteq Ann(\Lambda)$. Пусть $a \in Ann(\Lambda) \bigcap \Lambda_r$. Тогда

$r_a = 0$ в алгебре $U(L)$. Поскольку $U(L_r)$ является подалгеброй алгебры $U(L)$, то равенство $r_a = 0$ верно и в алгебре $U(L_r)$. Следовательно $a \in Ann(\Lambda_r)$. □

2.2 Свободное произведение алгебр Лейбница

Напомним, что алгебра Лейбница C называется свободным произведением алгебр Лейбница A и B, если имеются канонические гомоморфизмы $\alpha : A \to C$ и $\beta : B \to C$ такие, что для любой алгебры Лейбница L и для любой пары гомоморфизмов $\alpha' : A \to L$ и $\beta' : B \to L$ существует единственный гомоморфизм $\omega : C \to L$ такой, что $\omega\alpha = \alpha'$ и $\omega\beta = \beta'$. Из такого категорного определения не сразу следует существование свободного произведения двух алгебр.

Лемма 2.5 *Свободное произведение $A * B$ любой пары алгебр Лейбница A и B в многообразии алгебр Лейбница существует. Кроме того, канонические гомоморфизмы $\alpha : A \to A * B$ и $\beta : B \to A * B$ являются инъективными.*

Доказательство. Пусть X - линейный базис алгебры A и Y - линейный базис алгебры B. Таблица умножения для A и B состоит из соотношений

$$[a,b] = \sum_{c \in X} \alpha_{a,b}^{c} c$$

для любых $a,b \in X$ и

$$[d,e] = \sum_{f \in Y} \beta_{d,e}^{f} f$$

для любых $d,e \in Y$, соответственно.

Пусть $D = LB\langle X \cup Y \rangle$ свободная алгебра Лейбница со свободным множеством порождающих $X \cup Y$. Через I обозначим идеал алгебры D, порожденный элементами $[a,b] - \sum_{c \in X} \alpha_{a,b}^{c} c$ для всех $a,b \in X$ и $[d,e] - \sum_{f \in Y} \beta_{d,e}^{f} f$ для всех $d,e \in Y$. Рассмотрим $G = D/I$. Имеем естественные вложения $X \to D$, $Y \to D$ и естественный гомоморфизм $D \to G$. Их композиции определяют $\alpha : X \to G$ и $\beta : Y \to G$.

Докажем, что G является свободным произведением A и B с каноническими гомоморфизмами α и β. Пусть L - произвольная алгебра Лейбница и $\alpha' : A \to L$, $\beta' : B \to L$ - произвольные гомоморфизмы. Так как D является свободной алгеброй Лейбница, то существует единственный гомоморфизм $\theta : D \to L$ такой, что $\theta(x) = \alpha'(x)$ для всех $x \in X$ и $\theta(y) = \beta'(y)$ для всех $y \in Y$. Поскольку α' и β' гомоморфизмы, то имеем также $\theta(I) = 0$. Следовательно, θ индуцирует гомоморфизм $\omega : G \to L$. Очевидно, что $\omega\alpha = \alpha'$ и $\omega\beta = \beta'$. Поскольку $\alpha(X)$ и $\beta(Y)$ порождает G, отсюда следует единственность ω.

Рассмотрим тождественное отображение $id : A \to A$ и нулевой гомоморфизм $0 : B \to A$. По определению свободного произведения существует единственный гомоморфизм $\omega : G \to L$ такой, что $\omega\alpha = id$ и $\omega\beta = 0$. Это означает, $Ker\alpha = 0$. Аналогично, $Ker\beta = 0$. □

Следствие 2.1 *Объединение множеств порождающих алгебр A и B является множеством порождающих для $A * B$, объединение множеств определяющих соотношений A и B является множеством определяющих соотношений для $A * B$.*

Нашей целью является построение линейного базиса свободного произведения двух алгебр Лейбница. Линейный базис $s(A) = s_0(A) \cup s_1(A)$ алгебры Лейбница A называется *специальным базисом*, если $s_1(A)$ является линейным базисом $Ann(A)$ и $s(A)$ снабжен линейным порядком $\leq$ таким, что $x < y$ для любого $x \in s_1(A), y \in s_0(A)$. Заметим что, если $s(A)$ является специальным базисом алгебры A, то $\overline{s_0(A)} = \{\overline{x} \mid x \in s_0(A)\}$ является линейным базисом алгебры Ли $\overline{A}$.

Пусть A и B - произвольные алгебры Лейбница над полем k и пусть $s(A) = s_0(A) \cup s_1(A)$, $s(B) = s_0(B) \cup s_1(B)$ специальные базисы алгебр A и B соответственно. Рассмотрим алфавит $s(A) \cup s(B)$. Будем говорить, что $x, y \in s(A) \cup s(B)$ *не сравнимые*, если x и y оба не принадлежат одному и тому же множеству $s(A)$ или $s(B)$. Неассоциативные слова вида

$$[\ldots[[x_i, x_{i_1}], x_{i_2}], \ldots, x_{i_k}], \quad k \geq 0, \tag{2.7}$$

с правонормированной расстановкой скобок в алфавите $s(A) \cup s(B)$ называются *специальными*, если $x_{i_j} \in s_0(A) \cup s_0(B)$ для всех $1 \leq j \leq k$, x_i и x_{i_1} не являются сравнимыми, и для всех $1 < j \leq k$ элементы $x_{i_{j-1}}$ и x_{i_j} не являются сравнимыми или $x_{i_{j-1}} \leq x_{i_j}$. Определим степень $\deg$ слова вида (2.7) равным $k+1$.

Пусть W - множество всех специальных слов в алфавите $s(A) \cup s(B)$ и C - линейное пространство над полем k с линейным базисом W. Определим билинейную бинарную операцию $\circ$ на C. Пусть u и v произвольные специальные слова вида (2.7). Определим $u \circ v$ следующим образом:

(D1) если $v = x_j \in s_1(A) \cup s_1(B)$, тогда положим $u \circ v = 0$ для всех u;

(D2) рассмотрим случай, когда $v = x_j \in s_0(A) \cup s_0(B)$.

(a) Допустим, что $u = x_i$. Тогда положим $u \circ v = [x_i, x_j]$, если x_i и x_j не являются сравнимыми. В противном случае положим $u \circ v = \sum \alpha_t x_t$, где $[u, v] = \sum \alpha_t x_t$ в A или в B.

(b) Допустим, что $\deg u \geq 2$ и $u = [u', x_k]$. Положим $u \circ v = [u, x_j]$, если x_k и x_j не являются сравнимыми или $x_k \leq x_j$. Если $x_k > x_j$, то положим $u \circ v = (u' \circ x_j) \circ x_k + \sum \alpha_t u' \circ x_t$, где $[x_k, x_j] = \sum \alpha_t x_t$ в A или в B.

(D3) Если $\deg v \geq 2$ и $v = [v', x_r]$, то положим $u \circ v = (u \circ v') \circ x_r - (u \circ x_r) \circ v'$.

Замечание 2.1 *Произведение $u \circ v$ определено корректно и является линейной комбинацией специальных слов w таких, что* $\deg w < \deg u + \deg v$ *или* $\deg_x w = \deg_x u + \deg_x v$ *для всех* $x \in s(A) \cup s(B)$.

Это можно легко проверить индукцией по $\deg u + \deg v$. Заметим, что когда $v = x_j$, $u = [u', x_k]$ и $x_k > x_j$ в (D2b), необходимо провести обратную индукцию по v относительно $\leq$ и использовать конечность набора букв в u.

Продолжим $\circ$ на C линейным образом. Тогда верна следующая лемма

Лемма 2.6 *Алгебра C является алгеброй Лейбница.*

Доказательство. Пусть u, v и w произвольные специальные слова. Индукцией по $\deg u + \deg v + \deg w$ мы проверим тождество Лейбница (1.1) для u, v, w, т.е. проверим соотношение

$$u \circ (v \circ w) = (u \circ v) \circ w - (u \circ w) \circ v. \qquad (2.8)$$

Если $\deg u + \deg v + \deg w = 3$, тогда (2.8) легко следует из (D1) - (D3) и тождества Лейбница для A и B. Допустим, что (2.8) выполняется для всех u', v', w' таких, что

$$3 \leq \deg u' + \deg v' + \deg w' < \deg u + \deg v + \deg w.$$

Если $\deg w > 1$, то $w = [q, x]$, и по индукционному предположению имеем

$$u \circ (v \circ w) = u \circ (v \circ (q \circ x)) = u \circ ((v \circ q) \circ x - (v \circ x) \circ q) =$$

$$= (u \circ (v \circ q)) \circ x - (u \circ x) \circ (v \circ q) - (u \circ (v \circ x)) \circ q + (u \circ q) \circ (v \circ x) =$$

$$= ((u \circ v) \circ q) \circ x - ((u \circ q) \circ v) \circ x - ((u \circ x) \circ v) \circ q + ((u \circ x) \circ q) \circ v -$$

$$- ((u \circ v) \circ x) \circ q + ((u \circ x) \circ v) \circ q + ((u \circ q) \circ v) \circ x - ((u \circ q) \circ x) \circ v =$$

$$= (((u \circ v) \circ q) \circ x - ((u \circ v) \circ x) \circ q) - (((u \circ q) \circ x) \circ v - ((u \circ x) \circ q) \circ v) =$$

$$= (u \circ v) \circ (q \circ x) - (u \circ (q \circ x)) \circ v = (u \circ v) \circ w - (u \circ w) \circ v.$$

Поэтому можно считать, что $\deg w = 1$ и $w = x \in s(A) \cup s(B)$. Очевидно, из (D2) следует (2.8), если $x \in s_1(A) \cup s_1(B)$. Предположим, что $x \in s_0(A) \cup s_0(B)$.

Рассмотрим случай, когда $\deg v = 1$, т.е. $v = y \in s(A) \cup s(B)$. Мы также предполагаем, что $y \in s_0(A) \cup s_0(B)$. Если x и y не сравнимы, то $v \circ w = [y, x]$ по (D2a) и (2.8) непосредственно следует из (D3). Допустим, что $x, y \in A$. Так как $\deg u \geq 2$, то имеем $u = [q, z]$. Если $z \notin A$ или $z \leq y$ или $z \leq x$, тогда (2.8) также следует из (D3). Предположим, что $z > y$ и $z > x$. Тогда

$$u \circ (v \circ w) = (q \circ z) \circ (y \circ x) = q \circ (z \circ (y \circ x)) + (q \circ (y \circ x)) \circ z =$$

$$= q \circ ((z \circ y) \circ x) - q \circ ((z \circ x) \circ y) + (q \circ (y \circ x)) \circ z = (q \circ (z \circ y)) \circ x -$$

$$- (q \circ x) \circ (z \circ y) - (q \circ (z \circ x)) \circ y + (q \circ y) \circ (z \circ x) + (q \circ (y \circ x)) \circ z =$$

$$= ((q \circ z) \circ y) \circ x - ((q \circ y) \circ z) \circ x - (q \circ x) \circ (z \circ y) - ((q \circ z) \circ x) \circ y +$$

$$((q \circ x) \circ z) \circ y + (q \circ y) \circ (z \circ x) + (q \circ (y \circ x)) \circ z.$$

Следовательно,

$$u \circ (v \circ w) - (u \circ v) \circ w + (u \circ w) \circ v = -((q \circ y) \circ z) \circ x - (q \circ x) \circ (z \circ y) +$$

$$+ ((q \circ x) \circ z) \circ y + (q \circ y) \circ (z \circ x) + (q \circ (y \circ x)) \circ z.$$

Допустим, что $q \circ y = \sum \alpha_i w_i$, где $\alpha_i \in k$, w_i - специальные слова. Если $\deg w_i < \deg q + 1$, то по предположению индукции имеем

$$(w_i \circ z) \circ x - w_i \circ (z \circ x) = (w_i \circ x) \circ z.$$

В противном случае, $\deg_t w_i = \deg_t q + \deg_t y$ для всех $t \in s(A) \cup s(B)$ следует из замечания 2.1. Не трудно заметить, что последний символ w_i предшествует z по $\leq$. Следовательно, $w_i \circ z = [w_i, z]$ и согласно (D2b) мы снова имеем $(w_i \circ z) \circ x - w_i \circ (z \circ x) = (w_i \circ x) \circ z$. Отсюда получаем

$$-((q \circ y) \circ z) \circ x + (q \circ y) \circ (z \circ x) = -((q \circ y) \circ x) \circ z,$$

и аналогично,

$$-(q \circ x) \circ (z \circ y) + ((q \circ x) \circ z) \circ y = ((q \circ x) \circ y) \circ z.$$

Поэтому

$$u \circ (v \circ w) - (u \circ v) \circ w + (u \circ w) \circ v = ((q \circ y) \circ x) \circ z +$$
$$+ ((q \circ x) \circ y) \circ z + (q \circ (y \circ x)) \circ z = (-(q \circ y) \circ x +$$
$$+ (q \circ x) \circ y + q \circ (y \circ x)) \circ z = 0.$$

Если $\deg v > 1$, то имеем $v = [q, y]$. Если x и y не сравнимы или $y \leq x$, то $v \circ x = [v, x]$ и (2.8) непосредственно следует из (D3). Если $y > x$, тогда

$$u \circ (v \circ w) = u \circ ((q \circ y) \circ x) = u \circ (q \circ (y \circ x)) + u \circ ((q \circ x) \circ y)$$

Проведя обратную индукцию по x относительно $\leq$, мы можем предположить

$$u \circ ((q \circ x) \circ y) = (u \circ (q \circ x)) \circ y - (u \circ y) \circ (q \circ x),$$

так как $y > x$. Тогда

$$u \circ (v \circ w) = (u \circ q) \circ (y \circ x) - (u \circ (y \circ x)) \circ q + (u \circ (q \circ x)) \circ y -$$
$$- (u \circ y) \circ (q \circ x) = ((u \circ q) \circ y) \circ x - ((u \circ q) \circ x) \circ y - ((u \circ y) \circ x) \circ q +$$
$$+ ((u \circ x) \circ y) \circ q + ((u \circ q) \circ x) \circ y - ((u \circ x) \circ q) \circ y - ((u \circ y) \circ q) \circ x +$$
$$+ ((u \circ y) \circ x) \circ q = ((u \circ q) \circ y) \circ x + ((u \circ x) \circ y) \circ q - ((u \circ x) \circ q) \circ y -$$
$$- ((u \circ y) \circ q) \circ x = (u \circ v) \circ w - (u \circ w) \circ v. \quad \square$$

Теорема 2.2 *Пусть A и B произвольные алгебры Лейбница над полем k и*

$s(A) = s_0(A) \cup s_1(A)$, $s(B) = s_0(B) \cup s_1(B)$ *их специальные базисы соответственно. Множество всех специальных слов в алфавите* $s(A) \cup s(B)$ *составляет линейный базис свободного произведения* $A * B$.

Доказательство. Полагая $X = s(a)$ и $Y = s(b)$ мы используем все обозначения из доказательства леммы 2.5. Напомним, что G является свободным произведением A и B. Мы отождествляем A и B с $\alpha(A)$ и $\beta(B)$, соответственно, так как α и β являются инъективными.

Пусть C - алгебра Лейбница из леммы 2.6. Алгебра C порождается A и B. Через $\alpha' : A \to C$ и $\beta' : B \to C$ обозначим вложения. Тогда существует единственный гомоморфизм $\omega : G \to C$ такой, что $\omega\alpha = \alpha'$ и $\omega\beta = \beta'$. Следовательно, гомоморфизм ω является тождественным на A и B. Из тождества Лейбница (1.1) легко следует, что каждый элемент G является линейной комбинацией специальных слов вида (2.7). Это означает, что ω является изоморфизмом. □

Для алгебр Ли L_1 и L_2 их свободное произведение $L_1 * L_2$ в категории алгебр Ли построено в [11]. Одним из хороших свойств свободного произведения алгебр Ли [11] является то, что универсальная обертывающая алгебра $U(L_1 * L_2)$ является свободным произведением $U(L_1) * U(L_2)$ алгебр $U(L_1)$ и $U(L_2)$ в категории ассоциативных алгебр с единицей. К сожалению, это свойство не выполняется в случае алгебр Лейбница. Напомним, что универсальная обертывающая алгебра $UL(g)$ алгебры Лейбница g определена в [4] и $UL(g)$ является ассоциативной алгеброй, порожденной всеми r_a, l_a, где $a \in g$. Известно также, в [14], что соотношение

$$(r_b + l_b)l_a = 0$$

выполняется для всех $a, b \in g$. Если $0 \neq a \in A$ и $0 \neq b \in B$, тогда это соотношение показывает, что

$$UL(A * B) \ncong UL(A) * UL(A).$$

Будем говорить, что *проблема вхождения* (в конечно порожденные подалгебры) разрешима для алгебры A, если существует эффективная процедура, определяющая для любого элемента $a \in A$ и для любой конечно порожденной подалгебры B алгебры A принадлежит элемент a алгебре B или нет. Одна из самых важных теорем комбинаторной теории групп, доказанная К. Михайловой [30], говорит, что если проблема вхождения разрешима в двух группах G_1 и G_2, то она разрешима в их свободном произведении $G_1 * G_2$. У.У. Умирбаев [13] доказал неразрешимость проблемы вхождения для свободного произведения одномерной алгебры Ли и свободной метабелевой алгебры Ли достаточно большого ранга.

Теорема 2.3 *Пусть A - произвольная ненулевая алгебра Лейбница и L - свободная метабелева алгебра Ли достаточно большого ранга. Тогда проблема вхождения в подалгебру для свободного произведения $A * L$ алгоритмически неразрешима.*

Доказательство. Пусть a - ненулевой элемент алгебры A и $z_1, \ldots, z_n$ - свободные порождающие алгебры L. Положим $M = a \cdot U(L)$. Из теоремы 2.2 следует, что M является свободным правым $U(L)$-модулем.

Рассмотрим $f, f_1, \ldots, f_k \in U(L)$. Через S обозначим подалгебру алгебры $A * L$, порожденную элементами $a \cdot f_1, \ldots, a \cdot f_k, z_1, \ldots, z_n$. Из теоремы 2.2 следует, что

$$S \cap M = (a \cdot f_1) \cdot U(L) + \ldots + (a \cdot f_k) \cdot U(L).$$

Следовательно, $a \cdot f \in S$ тогда и только тогда, когда

$$a \cdot f \in (a \cdot f_1) \cdot U(L) + \ldots + (a \cdot f_k) \cdot U(L),$$

что эквивалентно $f \in f_1 \cdot U(L) + \ldots + f_k \cdot U(L)$.

В [13] доказано, что существует натуральное число n, для которого проблема вхождения в правые идеалы алгоритмически не разрешима в универсальной обертывающей алгебре $U(L)$. □

Заметим, что проблема вхождения для свободных метабелевых алгебр Ли разрешима [12].

3 РУЧНЫЕ И ПОЧТИ РУЧНЫЕ АВТОМОРФИЗМЫ СВОБОДНЫХ АЛГЕБР ЛЕЙБНИЦА РАНГА 2

В этом разделе исследованы автоморфизмы двупорожденных свободных алгебр Лейбница. Известно [15-18], что автоморфизмы алгебр многочленов $k[x,y]$ и свободных ассоциативных алгебр $k\langle x,y\rangle$ от двух переменных над произвольным полем k являются ручными. Более того [17-18], группы автоморфизмов алгебр $k[x,y]$ и $k\langle x,y\rangle$ изоморфны, т.е.

$$Aut_k k[x,y] \cong Aut_k k\langle x,y\rangle.$$

В работе [19] доказано, что автоморфизмы двупорожденных свободных алгебр Пуассона над полем характеристики 0 являются ручными. П. Кон [36] доказал, что автоморфизмы свободных алгебр Ли конечного ранга являются ручными. Аналог этой теоремы верен для свободных алгебр любого однородного шрайерового многообразия алгебр [37].

Алгебры многочленов и свободные ассоциативные алгебры от трех переменных в случае характеристики 0 имеют дикие автоморфизмы [22;25]. В работе [28] доказано, что автоморфизм

$$\delta = (x_1 + [[x_2, x_2], x_1], x_2)$$

свободной алгебры Лейбница от двух переменных $LB\langle x_1, x_2\rangle$ является диким. В подразделе 3.1 приведены основные определения и описано представление группы ручных автоморфизмов двупорожденных свободных алгебр Лейбница. В подразделе 3.2 введены в рассмотрение почти элементарные автоморфизмы, которые обобщают элементарные автоморфизмы. Описана структура почти элементарных автоморфизмов, и доказано, что они являются стабильно ручными. В подразделе 3.3 описано представление группы почти ручных автоморфизмов двупорожденных свободных алгебр Лейбница и в подразделе 3.4 приведен пример не почти ручного автоморфизма этой алгебры.

3.1 Ручные автоморфизмы

Пусть $\Lambda = LB\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$ - свободная алгебра Лейбница над полем k от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Автоморфизм φ свободной алгебры Лейбница Λ называется *элементарным* [26;39], если найдется i такое, что

$$\varphi(x_i) = \alpha x_i + g,$$

$0 \neq \alpha \in k,\ g \in LB\langle x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n \rangle$, и $\varphi(x_j) = x_j$ для всех $j \neq i$. Автоморфизм ψ алгебры Λ называется *ручным*, если он является произведением элементарных автоморфизмов. Не ручные автоморфизмы алгебры Λ называются *дикими*. Через $Aut(\Lambda)$ обозначим группу автоморфизмов алгебры Λ.

Запись $\varphi = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ означает автоморфизм φ алгебры Λ такой, что $\varphi(x_i) = f_i$, $1 \leq i \leq n$.

Элементарное преобразование системы элементов $f_1, f_2, \ldots, f_n$ заменяет только один элемент f_i на элемент

$$\alpha f_i + g,$$

где $0 \neq \alpha \in k,\ g \in \langle f_1, f_2, \ldots, f_{i-1}, f_{i+1}, \ldots, f_n \rangle$. Запись

$$(f_1, f_2, \ldots, f_n) \to (g_1, g_2, \ldots, g_n)$$

означает, что система элементов $g_1, g_2, \ldots, g_n$ получается из $f_1, f_2, \ldots, f_n$ одним элементарным преобразованием.

Легко показать, что автоморфизм $\varphi = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ является ручным тогда и только тогда, когда существует последовательность элементарных преобразований вида

$$(x_1, x_2, \ldots x_n) = (f_1^{(0)}, f_2^{(0)}, \ldots, f_n^{(0)}) \to (f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, \ldots, f_n^{(1)}) \to$$

$$\to \ldots \to (f_1^{(k)}, f_2^{(k)}, \ldots, f_n^{(k)}) = (f_1, f_2, \ldots, f_n) = \varphi.$$

Пусть $A = LB\langle x, y \rangle$ - свободная алгебра Лейбница от двух переменных x, y. Через $\deg$ обозначим стандартную функцию степени на A, т.е. $\deg x = \deg y = 1$. Положим $L = A/Ann(A)$.

Автоморфизм φ свободной алгебры Лейбница A называется *треугольным* [26], если

$$\varphi = (\alpha x + g, \beta y),$$

где $0 \neq \alpha, \beta \in k$, $g \in LB\langle y \rangle$. Через $T(A)$ обозначим группу треугольных автоморфизмов свободной алгебры Лейбница A, а через $GL_2(k)$ - группу линейных автоморфизмов алгебры A.

Определим степени y^n элемента $y \in A$, полагая $y^1 = y$, $y^n = [y^{n-1}, y]$, $n \geq 2$.

Лемма 3.1 *1) Система элементов*

$$A_0 = \{id = (x, y), \gamma = (y, x + ay) \mid a \in k\}$$

является системой представителей левых смежных классов $GL_2(k)$ по подгруппе $C = GL_2(k) \cap T(A)$.

2) Система элементов

$$B_0 = \{\delta = (x + h(y), y) \mid h(y) = \beta_n y^n + \ldots + \beta_2 y^2\}$$

является системой представителей левых смежных классов $T(A)$ по подгруппе $C = GL_2(k) \cap T(A)$.

Доказательство. 1) Пусть $l \in GL_2(k)$. Если l имеет вид $(ax + by, cx + dy)$, где $c \neq 0$, то

$$l = (y, x + \frac{d}{c} y) \circ ((b - \frac{ad}{c})x + ay, cy).$$

Если $c = 0$, то $l \in T(l)$, т.е. $l = id \circ l$. Допустим, что $\gamma_1 = (y, x + a_1 y)$, $\gamma_2 = (y, x + a_2 y)$ и $\gamma_1 C = \gamma_2 C$, тогда

$$\gamma_1^{-1} \circ \gamma_2 = (y - a_1 x, x) \circ (y, x + a_2 y) = (x, (a_2 - a_1)x + y) \in C.$$

Отсюда следует, что $a_1 = a_2$. Следовательно, $\gamma_1 = \gamma_2$.

2) Пусть $\psi = (\alpha x + h_1(y), \beta y) \in T(A)$, где $h_1(y) = \beta_n y^n + \ldots + \beta_2 y^2 + \beta_1 y$. Тогда ψ представляется в виде

$$\delta \circ \lambda,$$

где $\delta = (x + \dfrac{h(y)}{\alpha}, y), \lambda = (\alpha x + \beta_1 y, \beta y)$.

Допустим, что $\delta_1 = (x + h_1(y), y)$, $\delta_2 = (x + h_2(y), y)$ и $\delta_1 C = \delta_2 C$. Тогда

$$\delta_1^{-1} \circ \delta_2 = (x - h_1(y), y) \circ (x + h_2(y), y) = (x - h_1(y) + h_2(y), y) \in C,$$

откуда следует, что $h_1(y) = h_2(y)$. Следовательно, $\delta_1 = \delta_2$. □

Лемма 3.2 *Пусть* A_0, B_0 *- множества, определенные в лемме 3.1. Тогда любой ручной автоморфизм* φ *алгебры* A *разлагается в произведение вида*

$$\varphi = \gamma_1 \circ \delta_1 \circ \gamma_2 \circ \delta_2 \circ \ldots \circ \gamma_k \circ \delta_k \circ \lambda, \tag{3.1}$$

где $\gamma_i \in A_0$, $\gamma_2,\ldots,\gamma_k \neq id$, $\delta_i \in B_0$, $\delta_1,\ldots,\delta_{k-1} \neq id$, $\lambda \in GL_2(k) \cap T(A)$.

Доказательство. Имеем

$$(\alpha x + h_1(y), y) = (x + \frac{\beta_n}{\alpha} y^n + \ldots + \frac{\beta_2}{\alpha} y^2, y) \circ (\alpha x + \beta_1 y, y),$$

$$(x, \beta y + h_2(x)) = (y, x) \circ (x + \frac{\beta_n}{\beta} y^n + \ldots + \frac{\beta_2}{\beta} y, y) \circ (y, \beta x + \beta_1 y),$$

т.е. любой элементарный автоморфизм имеет вид

$$l_1 \circ \delta \circ l_2,$$

где $\delta \in B_0$, $l_1, l_2 \in GL_2(k)$.

Любой ручной автоморфизм φ представляется в виде

$$\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \ldots \circ \varphi_n,$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ - элементарные автоморфизмы. Следовательно, имеем

$$\varphi = l_1 \circ \delta_1 \circ l_2 \circ \delta_2 \circ \ldots \circ l_n \circ \delta_n \circ l_{n+1}, \tag{3.2}$$

где $\delta_i \in B_0$, $l_i \in GL_2(k)$.

Докажем индукцией по n, что φ представляется в виде произведения (3.1) с $k \leq n$.

Согласно лемме 3.1, автоморфизм l_1 записывается в виде $\gamma_1 \circ \lambda_1$, где $\gamma_1 \in A_0$, $\lambda_1 \in GL_2(k) \cap T(A)$. Тогда

$$l_1 \circ \delta_1 = \gamma_1 \circ \lambda_1 \circ \delta_1 = \gamma_1 \circ \delta_1' \circ \lambda_1,$$

где $\delta_1' = \lambda_1 \circ \delta_1 \circ \lambda_1^{-1} \in B_0$. Имеем

$$\varphi = \gamma_1 \circ \delta_1' \circ (\lambda_1 \circ l_2) \circ \delta_2 \circ \ldots \circ l_n \circ \delta_n \circ l_{n+1},$$

По индуктивному предположению, произведение

$$(\lambda_1 \circ l_2) \circ \delta_2 \circ \ldots \circ l_n \circ \delta_n \circ l_{n+1}$$

записывается в виде

$$\gamma_2 \circ \delta_2' \circ \gamma_3 \circ \ldots \gamma_k \circ \delta_k' \circ \gamma_{k+1} \circ \lambda, k \le n.$$

Следовательно,

$$\varphi = \gamma_1 \circ \delta_1' \circ \gamma_2 \circ \delta_2' \circ \ldots \gamma_k \circ \delta_k' \circ \gamma_{k+1} \circ \lambda.$$

Если $\gamma_2 \ne id$, то полученное представление имеет вид (3.1). Рассмотрим случай $\gamma_2 = id$. Так как $\delta_1' \circ \delta_2' = \delta_2'' \in B_0$, то

$$\varphi = \gamma_1 \circ \delta_1' \circ \delta_2' \circ \gamma_3 \circ \ldots \gamma_k \circ \delta_k' \circ \gamma_{k+1} \circ \lambda = \gamma_1 \circ \delta_2'' \circ \gamma_3 \circ \ldots \gamma_k \circ \delta_k' \circ \gamma_{k+1} \circ \lambda.$$

Поскольку $k-1 < n$, то, по индуктивному предположению, φ записывается в виде (3.1). □

Лемма 3.3 *Пусть* $\varphi = (f_1, f_2)$ *- автоморфизм алгебры* A*, представимый в виде произведения*

$$\varphi = \delta_1 \circ \gamma_2 \circ \delta_2 \circ \ldots \circ \gamma_k \circ \delta_k,$$

где $id \ne \gamma_i \in A_0, id \ne \delta_i \in B_0$ для всех i. Если $\delta_i = (x + h_i(y), y)$ и $deg(h_i(y)) = n_i$ для всех $1 \le i \le k$, то

$$deg(f_1) = n_1 + n_2 + \ldots + n_k - (k-1),$$

$$deg(f_2) = n_1 + n_2 + \ldots + n_{k-1} - (k-2).$$

Доказательство. Утверждение леммы докажем индукцией по k. Если $k = 1$, то

$$deg(f_1) = deg(h_1) = n_1, deg(f_2) = 1.$$

Предположим, что утверждение леммы выполняется для $k-1$. Положим,

$$\varphi_1 = \delta_1 \circ \gamma_2 \circ \delta_2 \circ \ldots \circ \gamma_{k-1} \circ \delta_{k-1} = (g_1, g_2).$$

По предположению индукции имеем

$$deg(g_1) = n_1 + n_2 + \ldots + n_{k-1} - (k-2),$$

$$deg(g_2) = n_1 + n_2 + \ldots + n_{k-2} - (k-3).$$

Напомним, что свободные алгебры Ли от двух переменных имеют только линейные автоморфизмы [28]. Так как любой автоморфизм алгебры A индуцирует автоморфизм свободной алгебры Ли $L = A/Ann(A)$ от двух переменных, то нелинейные части элементов g_1, g_2 принадлежат $Ann(A)$, т.е.

$$g_1 = l_1 + n_1,$$

$$g_2 = l_2 + n_2,$$

где l_1, l_2 - линейные части g_1, g_2, соответственно, $n_1, n_2 \in Ann(A)$.
Имеем

$$\varphi = (f_1, f_2) = \delta_1 \circ \gamma_2 \circ \delta_2 \circ \ldots \circ \gamma_{k-1} \circ \delta_{k-1} \circ \gamma_k \circ \delta_k = (g_1, g_2) \circ \gamma_k \circ \delta_k.$$

Применяя $\gamma_k = (y, x + ay)$ к (g_1, g_2), получаем

$$(r_1, r_2) = (g_2, g_1 + ag_2).$$

Тогда

$$deg(r_1) = deg(g_2) = n_1 + n_2 + \ldots + n_{k-2} - (k-3),$$

$$deg(r_2) = max\{deg(g_1), deg(g_2)\} = deg(g_1) = n_1 + n_2 + \ldots + n_{k-1} - (k-2).$$

Далее,

$$(f_1, f_2) = (r_1, r_2) \circ \delta_k = (r_1, r_2) \circ (x + h_k(y), y) = (r_1 + h_k(r_2), r_2).$$

Следовательно,

$$deg(f_1) = max\{deg(r_1), deg(h_k(r_2))\}, \quad deg(f_2) = deg(r_2).$$

Так как $deg(h_k) = n_k$, то

$$(r_2)^{n_k} = [r_2^{n_k - 1}, r_2] = [r_2^{n_k - 1}, l_{r_2} + n_{r_2}] = [r_2^{n_k - 1}, l_{r_2}] = [\ldots[r_2, \underbrace{l_{r_2}], \ldots l_{r_2}}_{n_{k-1}}],$$

где l_{r_2} - линейная часть r_2, а $n_{r_2} \in Ann(A)$.
Поскольку $deg(r_2) = n_1 + n_2 + \ldots + n_{k-1} - (k-2)$, то

$$deg(h_k(r_2)) = n_1 + n_2 + \ldots + n_k - (k-1).$$

Следовательно,

$$deg(f_1) = n_1 + n_2 + \ldots + n_k - (k-1),$$

$$deg(f_2) = n_1 + n_2 + \ldots + n_{k-1} - (k-2),$$

что и доказывает утверждение леммы. □

Лемма 3.4 *Разложение (3.1) автоморфизма φ из леммы 3.2 является однозначным.*

Доказательство. Достаточно показать, что

$$\gamma_1 \circ \delta_1 \circ \gamma_2 \circ \delta_2 \circ \ldots \circ \gamma_k \circ \delta_k \circ \gamma_{k+1} \circ \lambda \neq id,$$

при $k \geq 1$, $\gamma_i \in A_0$, $\gamma_2, \ldots, \gamma_k \neq id$, $\delta_i \in B_0$, $\delta_1, \ldots, \delta_{k-1} \neq id$, $\lambda \in GL_2(k) \cap T(A)$. Допустим, что

$$\gamma_1 \circ \delta_1 \circ \gamma_2 \circ \delta_2 \circ \ldots \circ \gamma_k \circ \delta_k \circ \gamma_{k+1} \circ \lambda = id.$$

Тогда

$$\delta_1 \circ \gamma_2 \circ \delta_2 \circ \ldots \circ \gamma_k \circ \delta_k = \gamma_1^{-1} \circ \lambda^{-1} \circ \gamma_{k+1}^{-1}. \tag{3.3}$$

Согласно лемме 3.2

$$(f_1, f_2) = \delta_1 \circ \gamma_2 \circ \delta_2 \circ \ldots \circ \gamma_k \circ \delta_k$$

и $deg(f_1) = n_1 + n_2 + \ldots + n_k - (k-1)$, $deg(f_2) = n_1 + n_2 + \ldots + n_{k-1} - (k-2)$. Так как правая часть (3.3) равна

$$(l_1, l_2) = \gamma_1^{-1} \circ \lambda^{-1} \circ \gamma_{k+1}^{-1} \in GL_2(k),$$

то $deg(l_1) = 1$, $deg(l_2) = 1$. Следовательно, $deg(f_1) \neq deg(l_1)$ и $deg(f_2) \neq deg(l_2)$, что и противоречит равенству (3.3). □

Теорема 3.1 *Группа ручных автоморфизмов свободной алгебры Лейбница* A *от двух переменных является свободным произведением подгрупп линейных автоморфизмов* $GL_2(k)$ *и треугольных автоморфизмов* $T(A)$ *с объединенной подгруппой* $C = GL_2(k) \cap T(A)$*, т.е.*

$$Tame(A) = GL_2(k) *_C T(A).$$

Доказательство. Так как A_0 и B_0 - системы левых смежных классов $GL_2(k)$ и $T(A)$ по подгруппе $GL_2(k) \cap T(A)$, то по лемме 3.2 любой ручной автоморфизм представляется в виде (3.1). По лемме 3.4 это представление является однозначным. Согласно [29],

$$Tame(A) = GL_2(k) *_C T(A),$$

где $C = GL_2(k) \cap T(A)$. □

3.2 Почти элементарные автоморфизмы

Пусть $\Lambda = LB\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ - свободная алгебра Лейбница со свободными образующими $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Автоморфизм φ алгебры Λ называется *почти элементарным*, если существует j такое что при $j \neq i$, $\varphi(x_i) = x_i$ и $\varphi(x_j) = h$. Автоморфизм ψ называется *почти ручным*, если он является произведением почти элементарных автоморфизмов.

Напомним, что почти элементарные автоморфизмы встречались в работе [31] при изучении автоморфизмов свободных метабелевых групп от трех порождающих.

Заметим, что автоморфизм

$$\delta = (x_1 + [[x_2, x_2], x_1], x_2)$$

из [28] алгебры $LB\langle x_1, x_2 \rangle$ является почти элементарным.

Из леммы 2.1 выделим одно следствие

Следствие 3.1 *Эндоморфизм* $\varphi = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ *алгебры* Λ *является автоморфизмом тогда и только тогда, когда выполняются условия:*

1) $L = \Lambda / Ann(\Lambda) = Lie < \overline{f_1}, \overline{f_2}, \dots, \overline{f_n} >$;

2) $\Lambda = f_1 U(L) \oplus f_2 U(L) \oplus \dots \oplus f_n U(L)$.

Определим один класс автоморфизмов алгебры Λ.

Лемма 3.5 *Пусть* φ *- эндоморфизм алгебры* Λ *такой, что* $\varphi(x_i) = x_i$ *при* $i \le n-1$ *и* $\varphi(x_n) = f$ *. Тогда* φ *является автоморфизмом алгебры* Λ *тогда и только тогда, когда*

$$f = \alpha x_n + g + h$$

где $0 \ne \alpha \in k, \quad g \in < x_1, x_2, \dots x_{n-1} >, \quad h \in Ann(\Lambda_{n-1})$.

Доказательство. Допустим, что φ - автоморфизм алгебры Λ. Очевидно, φ индицирует элементарный автоморфизм алгебры L, т.е.

$$f = \alpha x_n + g + h,$$

где $0 \ne \alpha \in k, \quad g \in < x_1, x_2, \dots x_{n-1} >, \quad h \in Ann(\Lambda)$.

Пусть $\psi = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \alpha x_n + g)$. Заменяя φ на $\varphi\psi^{-1}$, можно считать, что $f = x_n + h,$ где $h \in Ann(\Lambda)$.

По следствию 3.1 эндоморфизм φ алгебры Λ является автоморфизмом тогда и только тогда, когда

$$\Lambda = x_1 U(L) \oplus x_2 U(L) \oplus \dots \oplus x_{n-1} U(L) \oplus f U(L).$$

Это эквивалентно тому, что $h \in \Lambda_{n-1}$. По лемме 2.4 имеем $h \in Ann(\Lambda_{n-1})$.

Допустим, что f удовлетворяет условию леммы. Еще раз заменяя φ на $\varphi\psi^{-1}$

можно считать, что $f = x_n + h,$ где $h \in \Lambda_{n-1}$. Очевидно, φ удовлетворяет условию 1 следствия 3.1. Так как $h \in \Lambda_{n-1}$, то φ удовлетворяет и условию 2 следствия 3.1, т.е. φ - автоморфизм. □

Лемма 3.5 дает описание почти элементарных автоморфизмов алгебры Λ.

Следуя [27] определим стабильно ручные автоморфизмы. Автоморфизм φ алгебры Λ назовем k - *стабильно ручным*, если автоморфизм ψ алгебры $LB\langle x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_k \rangle$, определенный правилом $\psi(x_i) = \varphi(x_i)$, $\psi(y_j) = y_j$ для всех $i, j,$ является ручным.

Лемма 3.6 *Автоморфизм*

$$\delta = (x_1 + [[x_2, x_2], x_1], x_2)$$

алгебры $LB\langle x_1, x_2 \rangle$ является 1 - стабильно ручным.

Доказательство. Имеем

$$(x_1, x_2, x_3) \to (x_1, x_2, x_3 + [x_2, x_1]) \to$$

$$\to (x_1 + [x_3 + [x_2, x_1], x_2] + [x_2, x_3 + [x_2, x_1]], x_2, x_3 + [x_2, x_1]) \to$$

$$\to (x_1 + [x_3 + [x_2, x_1], x_2] + [x_2, x_3 + [x_2, x_1]], x_2, x_3 + [x_2, x_1]$$

$$- [x_2, x_1 + [x_3 + [x_2, x_1], x_2] + [x_2, x_3 + [x_2, x_1]]]) =$$

$$= (x_1 + [x_3 + [x_2, x_1], x_2] + [x_2, x_3 + [x_2, x_1]], x_2, x_3) =$$

$$= (x_1 + [x_3, x_2] + [x_2, x_3] + [[x_2, x_1], x_2] + [x_2, [x_2, x_1]], x_2, x_3) \to$$

$$\to (x_1 + [[x_2, x_1], x_2] + [x_2, [x_2, x_1]], x_2, x_3) = (x_1 + [[x_2, x_2], x_1], x_2, x_3) = \delta,$$

т.е. автоморфизм δ является 1 - стабильно ручным. □

К сожелению не удается доказать, что все почти элементарные автоморфизмы являются 1 - стабильно ручными. Тем не менее доказана следующая

Теорема 3.2 *Любой почти ручной автоморфизм алгебры* $\Lambda = LB\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ *является 2 - стабильно ручным.*

Доказательство. Утверждение теоремы достаточно доказать для почти элементарного автоморфизма φ. Более того, можно считать, что

$$\varphi(x_i) = x_i, 1 \le i \le n-1, \varphi(x_n) = x_n + h, h \in Ann(\Lambda_{n-1})$$

По лемме 2.3 имеем

$$h = \sum_{j=1}^{s} \alpha_j [w_j, w_j],$$

где $w_i \in \Lambda_{n-1}$. Следовательно, $\varphi = \psi_1 \cdot \psi_2 \cdot \ldots \cdot \psi_s$, где

$$\psi_j(x_n) = x_n + \alpha_j [w_j, w_j], \psi_j(x_i) = x_i, 1 \le i \le n-1,\ 1 \le j \le s.$$

Поэтому можно считать, что

$$\varphi(x_n) = x_n + [w, w], w \in \Lambda_{n-1},$$

$$\varphi(x_i) = x_i, 1 \le i \le n-1.$$

Продолжение автоморфизма φ на алгебру $LB < x_1, x_2, \ldots x_n, y_1, y_2 >$ обозначим через ψ , т.е. $\psi(x_i) = \varphi(x_i),\ 1 \le i \le n,\ \psi(y_j) = y_j,\ \ j = 1,2$.

Ниже мы рассмотрим элементарные преобразования, оставляющие на месте элементы $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$. Поэтому запись $(x_1, x_2, \ldots x_n, y_1, y_2)$ сокращаем до (x_n, y_1, y_2). Имеем

$$(x_n,\ y_1, y_2) \to (x_n, y_1 + w, y_2) \to (x_n + [y_1, y_2] + y_1 \circ w + [w, w], y_1 + w, y_2) \to$$

$$\to (x_n + [y_1, y_2] + y_1 \circ w + [w, w], y_1, y_2) \to (x_n + [y_1, y_1] + y_1 \circ w + [w, w], y_1,$$

$$y_2 + w) \to (x_n + [y_1, y_1] - y_1 \circ y_2 + [w, w], y_1, y_2 + w) \to (x_n + [y_1, y_2] - y_1 \circ y_2 +$$

$$+ [w, w], y_1, y_2) \to (x_n + [w, w], y_1, y_2) = \psi$$

т.е. ψ является ручным. Это означает, что φ является 2 - стабильно ручным. □

3.3 Почти ручные автоморфизмы

Как и ранее, положим $A = LB\langle x, y \rangle$ - свободная алгебра Лейбница над полем k от переменных x, y и $L = A/AnnA$.

Автоморфизм φ алгебры A называется *почти треугольным*, если

$$\varphi = (g, \beta y),$$

где $0 \neq \beta \in k$. Через $AT(A)$ обозначим группу почти треугольных автоморфизмов алгебры A, а через $ATame(A)$ группу почти ручных автоморфизмов алгебры A.

Если $\varphi = (g, \beta y)$ является автоморфизмом, тогда из леммы 2.1 следует, что

$$A = gU(L) \oplus (\beta y)U(L) = xU(L) \oplus yU(L). \tag{3.4}$$

Следовательно, $g = \alpha x + a$, где $a \in yU(L)$. Заметим, что φ индуцирует линейный автоморфизм свободной алгебры Ли L, так как все автоморфизмы алгебры L являются линейными [36]. Отсюда $a = \gamma y + b$, где $b \in Ann(A) \cap yU(L)$.

Следствие 3.2 *Автоморфизм φ алгебры A является почти треугольным тогда и только тогда, когда*

$$\varphi = (\alpha x + \gamma y + yu, \beta y),$$

где $\alpha, \beta, \gamma \in k$, $0 \neq \alpha, \beta$, $u \in U(L)$ и $yu \in Ann(A)$.

Лемма 3.7 *1) Система элементов*

$$A_1 = \{id = (x, y), \gamma = (y, x + ay) \mid a \in k\}$$

является системой представителей левых смежных классов $GL_2(k)$ по подгруппе $H = GL_2(k) \cap AT(A)$.

2) Система элементов

$$B_1 = \{\delta = (x + yu, y) \mid yu \in Ann(A)\}$$

является системой представителей левых смежных классов $AT(A)$ по подгруппе $H = GL_2(k) \cap AT(A)$.

Доказательство. 1) Пусть $l \in GL_2(k)$. Если l имеет вид $(ax + by, cx + dy)$, где $c \neq 0$, то

$$l=(y,x+\frac{d}{c}y)\circ((b-\frac{ad}{c})x+ay,cy).$$

Если $c=0$, то $l\in T(A)$, т.е. $l=id\circ l$.
Допустим, что $\gamma_1=(y,x+a_1y)$, $\gamma_2=(y,x+a_2y)$ и $\gamma_1H=\gamma_2H$, тогда

$$\gamma_1^{-1}\circ\gamma_2=(y-a_1x,x)\circ(y,x+a_2y)=(x,(a_2-a_1)x+y)\in H.$$

Отсюда следует, что $a_1=a_2$. Следовательно, $\gamma_1=\gamma_2$.
Пусть $\psi=(\alpha x+yu+\beta_1y,\beta y)\in AT(A)$, где $h_1(y)=\beta_ny^n+\ldots+\beta_2y^2+\beta_1y$. Тогда ψ представляется в виде

$$\delta\circ\lambda,$$

где $\delta=(x+\frac{yu)}{\alpha},y),\lambda=(\alpha x+\beta_1y,\beta y)$.
Допустим, что $\delta_1=(x+yu_1,y)$, $\delta_2=(x+yu_2,y)$ и $\delta_1H=\delta_2H$. Тогда

$$\delta_1^{-1}\circ\delta_2=(x-yu_1,y)\circ(x+uy_2,y)=(x-yu_1+yu_2,y)\in H,$$

откуда следует, что $yu_1=yu_2$. Следовательно, $\delta_1=\delta_2$. □

Лемма 3.8 *Пусть* A_1, B_1 *- множества, определенные в лемме 3.7. Тогда любой почти ручной автоморфизм* φ *алгебры* A *разлагается в произведение вида*

$$\varphi=\gamma_1\circ\delta_1\circ\gamma_2\circ\delta_2\circ\ldots\circ\gamma_k\circ\delta_k\circ\lambda, \tag{3.5}$$

где $\gamma_i\in A_1$, $\gamma_2,\ldots,\gamma_k\neq id$, $\delta_i\in B_0$, $\delta_1,\ldots,\delta_{k-1}\neq id$, $\lambda\in GL_2(k)\cap AT(A)$.

Доказательство. Имеем

$$(\alpha x+yu+\beta_1y,y)=(x+\frac{yu}{\alpha},y)\circ(\alpha x+\beta_1y,y),$$

$$(x,\beta y+xu+\beta_1x)=(y,x)\circ(x+\frac{yu}{\beta},y)\circ(y,\beta x+\beta_1y),$$

т.е. любой почти элементарный автоморфизм имеет вид

$$l_1 \circ \delta \circ l_2,$$

где $\delta \in B_1,\ l_1, l_2 \in GL_2(k)$.
Любой ручной автоморфизм φ представляется в виде

$$\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \ldots \circ \varphi_n,$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ - почти элементарные автоморфизмы. Следовательно, имеем

$$\varphi = l_1 \circ \delta_1 \circ l_2 \circ \delta_2 \circ \ldots \circ l_n \circ \delta_n \circ l_{n+1}, \tag{3.6}$$

где $\delta_i \in B_1,\ l_i \in GL_2(k)$.

Докажем индукцией по n, что φ представляется в виде произведения (3.5) с $k \le n$.

Согласно лемме 3.8, автоморфизм l_1 записывается в виде $\gamma_1 \circ \lambda_1$, где $\gamma_1 \in A_1$, $\lambda_1 \in GL_2(k) \cap AT(A)$. Тогда

$$l_1 \circ \delta_1 = \gamma_1 \circ \lambda_1 \circ \delta_1 = \gamma_1 \circ \delta_1' \circ \lambda_1,$$

где $\delta_1' = \lambda_1 \circ \delta_1 \circ \lambda_1^{-1} \in B_1$. Имеем

$$\varphi = \gamma_1 \circ \delta_1' \circ (\lambda_1 \circ l_2) \circ \delta_2 \circ \ldots \circ l_n \circ \delta_n \circ l_{n+1},$$

По индуктивному предположению, произведение

$$(\lambda_1 \circ l_2) \circ \delta_2 \circ \ldots \circ l_n \circ \delta_n \circ l_{n+1}$$

записывается в виде

$$\gamma_2 \circ \delta_2' \circ \gamma_3 \circ \ldots \gamma_k \circ \delta_k' \circ \gamma_{k+1} \circ \lambda, k \le n.$$

Следовательно,

$$\varphi = \gamma_1 \circ \delta_1' \circ \gamma_2 \circ \delta_2' \circ \ldots \gamma_k \circ \delta_k' \circ \gamma_{k+1} \circ \lambda.$$

Если $\gamma_2 \neq id$, то полученное представление имеет вид (3.5). Рассмотрим случай

$\gamma_2 = id$. Так как $\delta_1' \circ \delta_2' = \delta_2'' \in B_1$, то

$$\varphi = \gamma_1 \circ \delta_1' \circ \delta_2' \circ \gamma_3 \circ \ldots \gamma_k \circ \delta_k' \circ \gamma_{k+1} \circ \lambda = \gamma_1 \circ \delta_2'' \circ \gamma_3 \circ \ldots \gamma_k \circ \delta_k' \circ \gamma_{k+1} \circ \lambda.$$

Поскольку $k-1 < n$, то, по индуктивному предположению, φ записывается в виде (3.5).□

Лемма 3.9 *Пусть* $\varphi = (f_1, f_2)$ - *автоморфизм алгебры* A, *представимый в виде произведения*

$$\varphi = \delta_1 \circ \gamma_2 \circ \delta_2 \circ \ldots \circ \gamma_k \circ \delta_k,$$

где $id \neq \gamma_i \in A_1$, $id \neq \delta_i \in B_1$ для всех i. Если $\delta_i = (x + yu_i, y)$ и $deg(yu_i) = n_i$ для всех $1 \le i \le k$, то

$$deg(f_1) = n_1 + n_2 + \ldots + n_k - (k-1),$$

$$deg(f_2) = n_1 + n_2 + \ldots + n_{k-1} - (k-2).$$

Доказательство. Утверждение леммы докажем индукцией по k. Если $k = 1$, то

$$deg(f_1) = deg(yu_1) = n_1, \; deg(f_2) = 1.$$

Предположим, что утверждение леммы выполняется для $k-1$. Положим,

$$\varphi_1 = \delta_1 \circ \gamma_2 \circ \delta_2 \circ \ldots \circ \gamma_{k-1} \circ \delta_{k-1} = (g_1, g_2).$$

Тогда

$$deg(g_1) = n_1 + n_2 + \ldots + n_{k-1} - (k-2),$$

$$deg(g_2) = n_1 + n_2 + \ldots + n_{k-2} - (k-3).$$

Заметим, что $n_i \ge 2$, так как $id \neq \delta_i \in B_1$. Тогда $deg(g_1) > deg(g_2)$.
Имеем

$$\varphi = (f_1, f_2) = (g_1, g_2) \circ \gamma_k \circ \delta_k.$$

Если $\gamma_k = (y, x + ay)$, тогда

$$(g_1, g_2) \circ \gamma_k = (g_2, g_1 + ag_2) = (r_1, r_2) = \psi$$

и

$$deg(r_1) = deg(g_2) = n_1 + n_2 + \ldots + n_{k-2} - (k-3),$$

$$deg(r_2) = deg(g_1 + ag_2) = deg(g_1) = n_1 + n_2 + \ldots + n_{k-1} - (k-2),$$

поскольку $deg\ g_1 > deg\ g_2$. Следовательно, $deg\ r_1 < deg\ r_2$. Далее, имеем

$$(f_1, f_2) = (r_1, r_2) \circ \delta_k = (r_1, r_2) \circ (x + yu_k, y) = (r_1 + r_2\psi(u_k), r_2).$$

Заметим, что $deg\ \psi(u_k) = deg\ u_k$, поскольку ψ индуцирует линейный автоморфизм. Следовательно, $deg\ r_2\psi(u_k) = deg\ r_2 + n_k - 1$ и $deg(f_1) = deg\ r_2 + n_k - 1$. Тогда

$$\begin{aligned} deg(f_1) &= deg\ r_2 + n_k - 1 = \\ &= n_1 + n_2 + \ldots + n_{k-1} - (k-2) + n_k - 1 = \\ &= n_1 + n_2 + \ldots + n_k - (k-1) \end{aligned}$$

и

$$deg(f_2) = deg\ r_2 = n_1 + n_2 + \ldots + n_{k-1} - (k-2). \square$$

Лемма 3.10 *Разложение (3.5) автоморфизма φ из леммы 3.8 является однозначным.*

Доказательство. Достаточно показать, что

$$\gamma_1 \circ \delta_1 \circ \gamma_2 \circ \delta_2 \circ \ldots \circ \gamma_k \circ \delta_k \circ \gamma_{k+1} \circ \lambda \neq id,$$

при $k \geq 1$, $\gamma_i \in A_1$, $\gamma_2, \ldots, \gamma_k \neq id$, $\delta_i \in B_1$, $\delta_1, \ldots, \delta_{k-1} \neq id$, $\lambda \in H$. Допустим, что

$$\gamma_1 \circ \delta_1 \circ \gamma_2 \circ \delta_2 \circ \ldots \circ \gamma_k \circ \delta_k \circ \gamma_{k+1} \circ \lambda = id.$$

Тогда

$$\delta_1 \circ \gamma_2 \circ \delta_2 \circ \ldots \circ \gamma_k \circ \delta_k = \gamma_1^{-1} \circ \lambda^{-1} \circ \gamma_{k+1}^{-1}. \qquad (3.7)$$

Согласно лемме 3.8

$$(f_1, f_2) = \delta_1 \circ \gamma_2 \circ \delta_2 \circ \ldots \circ \gamma_k \circ \delta_k$$

и $deg(f_1) = n_1 + n_2 + \ldots + n_k - (k-1)$, $deg(f_2) = n_1 + n_2 + \ldots + n_{k-1} - (k-2)$. Так как правая часть (3.7) равна

$$(l_1, l_2) = \gamma_1^{-1} \circ \lambda^{-1} \circ \gamma_{k+1}^{-1} \in GL_2(k),$$

то $deg(l_1) = 1$, $deg(l_2) = 1$. Следовательно, $deg(f_1) \neq deg(l_1)$ и $deg(f_2) \neq deg(l_2)$, что и противоречит равенству (3.7).□

Теорема 3.3 *Группа почти ручных автоморфизмов свободной алгебры Лейбница A от двух переменных является свободным произведением подгрупп линейных автоморфизмов* $GL_2(k)$ *и почти треугольных автоморфизмов* $AT(A)$ *с объединенной подгруппой* $H = GL_2(k) \cap AT(A)$*, т.е.*

$$ATame(A) = GL_2(k) *_H AT(A).$$

Доказательство. Так как A_1 и B_1 - системы левых смежных классов $GL_2(k)$ и $AT(A)$ по подгруппе $GL_2(k) \cap AT(A)$, то по лемме 3.8 любой почти ручной автоморфизм представляется в виде (3.5). По лемме 3.10 это представление является однозначным. Согласно [29],

$$ATame(A) = GL_2(k) *_H AT(A),$$

где $H = GL_2(k) \cap AT(A)$. □

3.4 Пример не почти ручного автоморфизма

Положим снова $A = LB\langle x, y\rangle$ - свободная алгебра Лейбница над полем k от переменных x, y и $L = A/AnnA$. Рассмотрим дифференцирование ∂ алгебры A определенное правилом

$$\partial(x) = f,\ \partial(y) = g,$$

где

$$f=[[[x,x],[[y,x],x]],x]-[[[[y,x],x],[[y,x],x]],x],$$

$$g=[[x,x],[[y,x],x]]-[[[y,x],x],[[y,x],x]].$$

Заметим, что $f,g\in Ann(A)$ и $f=[g,x]$. Используя (1.1) и (3.4), не трудно показать, что f и g - ненулевые элементы и $\deg f=7$, $\deg g=6$. Прямые вычисления дают $\partial^2(x)=0$ и $\partial^2(y)=0$, т.е. ∂ является локально--нильпотентным. Кроме того, $\partial^2=0$, поскольку $f,g\in Ann(A)$. Рассмотрим отображение

$$\delta=\exp(\partial):A\to A,$$

заданное правилом

$$\delta=\exp(\partial)=id+\partial=(x+f,y+g).$$

δ является автоморфизмом алгебры A, обратным к которому является

$$\delta^{-1}=\exp(-\partial)=id-\partial=(x-f,y-g).$$

Действительно, мы имеем

$$(\delta\circ\delta^{-1})(x)=\delta(x-f)=$$

$$=\delta(x-[[[x,x],[[y,x],x]],x]+[[[[y,x],x],[[y,x],x]],x])=$$

$$=x+f-[[[x+f,x+f],[[y+g,x+f],x+f]],x+f]+$$

$$+[[[[y+g,x+f],x+f],[[y+g,x+f],x+f]],x+f]=$$

$$=x+f-[[[x,x]+[f,x],[[y,x]+[g,x],x+f]],x+f]+$$

$$+[[[[y,x]+[g,x],x+f],[[y,x]+[g,x],x+f]],x+f]=$$

$$=x+f-[[[x,x],[[y,x],x]],x]-[[[f,x],[[y,x],x]],x]+$$

$$+[[[[y,x],x],[[y,x],x]],x]+[[[[g,x],x],[[y,x],x]],x]=$$

$$=x-[[[f,x],[[y,x],x]],x]+[[[[g,x],x],[[y,x],x]],x]=x$$

и

$$(\delta\circ\delta^{-1})(y)=\delta(y-g)=$$
$$=\delta(y-[[x,x],[[y,x],x]]+[[[y,x],x],[[y,x],x]])=$$
$$=y+g-[[x+f,x+f],[[y+g,x+f],x+f]]+$$
$$+[[[y+g,x+f],x+f],[[y+g,x+f],x+f]]=$$
$$=y+g-[[x,x]+[f,x],[[y,x]+[g,x],x+f]]+$$
$$+[[[[y,x]+[g,x],x+f],[[y,x]+[g,x],x+f]]=$$
$$=y+g-[[x,x],[[y,x],x]]-[[f,x],[[y,x],x]]+$$
$$+[[[y,x],x],[[y,x],x]]+[[[g,x],x],[[y,x],x]]=$$
$$=y-[[f,x],[[y,x],x]]+[[[g,x],x],[[y,x],x]]=y.$$

Следовательно, δ - автоморфизм.

Теорема 3.4 *Автоморфизм* δ *двупорожденной свободной алгебры Лейбница* $A=LB\langle x,y\rangle$ *не является почти ручным.*

Доказательство. Допустим, что δ - почти ручной автоморфизм. В силу свойств A_1 и B_1, δ может быть записан в виде

$$\delta=\gamma_1\circ\delta_1\circ\gamma_2\circ\delta_2\circ\ldots\circ\gamma_k\circ\delta_k\circ\lambda, \qquad (3.8)$$

где $\gamma_i\in A_1$, $\gamma_2,\ldots,\gamma_k\neq id$, $\delta_i\in B_1$, $\delta_1,\ldots,\delta_k\neq id$, $\lambda\in GL_2(k)$. Положим

$$(f_1,f_2)=\gamma_1\circ\delta_1\circ\gamma_2\circ\delta_2\circ\ldots\circ\gamma_k\circ\delta_k.$$

Если $deg\ \delta_i(x)=n_i$, тогда по лемме 3.9

$$deg(f_1)=n_1+n_2+\ldots+n_k-(k-1),$$
$$deg(f_2)=n_1+n_2+\ldots+n_{k-1}-(k-2).$$

Мы имеем $\deg f_1>\deg f_2$, $\deg(x+f)=7>\deg(y+g)=6$ и $\delta=(f_1,f_2)\circ\lambda$. Это возможно только тогда, когда $\lambda\in H$.

Допустим, что $\lambda^{-1}=(\alpha x+\gamma y,\beta y)$, где $\alpha,\beta\neq 0$. Тогда

$$f_1 = \alpha(x + f) + \gamma(y + g),$$
$$f_2 = \beta(y + g).$$

Следовательно, $\deg f_1 = 7$, $\deg f_2 = 6$ и

$$\deg f_1 - \deg f_2 = 1 = n_k - 1.$$

Тогда $n_k = 2$ и отсюда следует, что

$$\delta_k = (x + \rho[y, y], y).$$

Положим также

$$(h_1, h_2) = \gamma_1 \circ \delta_1 \circ \gamma_2 \circ \ldots \circ \delta_{k-1} \circ \gamma_k.$$

Из леммы 3.9 легко следует, что $\deg h_1 \le \deg h_2$.
Кроме того, мы имеем $(h_1, h_2) \circ \delta_k = (f_1, f_2)$. Тогда

$$f_1 = h_1 + \rho[h_2, h_2],$$
$$f_2 = h_2.$$

Для каждого $a \in L$ через $\overline{a}$ обозначим его старшие однородные части по отношению к степени. Тогда

$$\alpha\overline{f} = \overline{f_1} = \rho\overline{[h_2, h_2]} = \rho\beta^2\overline{[y + g, y + g]} = \rho\beta^2\overline{[g, y]}.$$

Заметим, что $\overline{f} = \overline{[g, x]}$ и $\overline{[g, y]}$ линейно независимы. Это противоречие показывает, что δ не является почти ручным. □

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена исследованию автоморфизмов двупорожденных свободных алгебр Лейбница и исследованию структуры подалгебр свободных алгебр Лейбница. В диссертационной работе получены следующие результаты:

- доказано, что правые идеалы свободных алгебр Лейбница, порожденные любым подмножеством множества свободных порождающих этой алгебры, являются свободными алгебрами Лейбница;
- построен линейный базис свободного произведения двух алгебр Лейбница;
- доказана неразрешимость проблемы вхождения для свободного произведения произвольной ненулевой алгебры Лейбница и свободной метабелевой алгебры Ли достаточно большого ранга;
- получено представление группы ручных автоморфизмов свободных алгебр Лейбница от двух порождающих в виде свободного произведения;
- описана структура почти элементарных автоморфизмов свободной алгебры Лейбница конечного ранга;
- доказано что почти ручные автоморфизмы свободной алгебры Лейбница конечного ранга являются 2 - стабильно ручными;
- получено представление группы почти ручных автоморфизмов свободных алгебр Лейбница от двух порождающих в виде свободного произведения;
- построен пример не почти ручного автоморфизма свободной алгебры Лейбница от двух порождающих.

Работа имеет теоретическое значение. Результаты и методы диссертации могут быть использованы для дальнейшего исследования алгебр Лейбница и свободных алгебр, а также при исследовании автоморфизмов свободных алгебр. Кроме того, результаты могут быть использованы при чтении специальных курсов по теории колец.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Блох А. Об одном обобщенном понятии алгебр Ли // Д.А.Н. СССР.- 1965. - Т.165, № 3.-С.471-473.

2 Loday J., Quillen D. Cyclic homology and the Lie algebra homology of matrices // Comment. Math. Helw.-1984. -Vol.59.-P.565-591.

3 Loday J.-L. Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbres de Leibniz // L'Enseignement Math.-1993.-Vol.39. -P. 269-293.

4 Loday J.-L.,Pirashvili T. Universal enveloping algebras of Leibniz algebras and (co) homology // Math. Ann.-1993.Vol.296. -P. 139-158.

5 Mikhalev A. A.,Umirbaev U. U. Subalgebras of free Leibniz algebras // Commun. Algebra. -1998. -Vol.26, № 2. -P.435-446.

6 Бахтурин Ю.А. Тождества в алгебрах Ли. -М.: Наука, 1985.-488с.

7 Курош А.Г. Неассоциативные алгебры и свободные произведения алгебр // Матем.сб. -1947. -Т.20. -С. 119-126.

8 Ширшов А.И. Подалгебры свободных коммутативных и свободных антикоммутативных алгебр // Матем.сб. -1954. -Т.34, № 1.-С.81-88.

9 Ширшов А.И. Подалгебры свободных лиевых алгебр // Мат. сб. -1953. Т.33(75), №2. -С. 441-452.

10 Witt E. Die Unterringe der freien Lieschen Ringe // Math. Z. -1956. –Vol.64. -P.195-216.

11 Ширшов А.И. Об одной гипотезе теории алгебр Ли // Сиб. матем. журн. -1962. -Т.3. -С. 297-301.

12 Зайцев М.В. О финитной отделимости свободных алгебр Ли // Тезисы докладов Межд.конф. по алгебре .- Барнаул, 1991. -С.43.

13 Умирбаев У.У. Проблема вхождения для алгебр Ли // Алгебра и логика. -1993.-Т.32, №3. -С. 326-340.

14 Абдыхалыков А.Т. Проблема вхождения для свободных разрешимых алгебр Лейбница // Вестник КазГУ сер. Матем. мех. инфор.-2000.-Т.23, №4. -С. 19-25.

15 Jung H.W.E. Uber ganze birationale Transformationen der Ebene // J. reine angew. Math. - 1942. -Vol.184. - P.161 - 174.

16 Van der Kulk W. On Polynomial Rings in Two Variables // Nieuw Archief voor Wisk. - 1953. -Vol.1. - P.33 - 41.

17 Czerniakiewicz A.J. Automorphisms of a Free Associatove Algebra of Rank 2,

I, II, // Trans. Amer. Math. Soc. -1971. -P.309 - 315.

18 Makar-Limanov L. Автоморфизмы свободной алгебры от двух порождающих // Функцион. анализ и его прил. -1970. -T. 4. -С. 107 - 108.

19 Makar-Limanov L., Turusbekova U. , Umirbaev U. U. Automorphisms and derivations of free Poisson algebras in two variables// Algebras, representations and applications. Contemp. Math., 483, Amer. Math. Soc. Providence, RI. -2009. -P.169-177.

20 Shestakov I.P., Umirbaev U.U. Tame and wild automorphisms of rings of polynomials in three variables// Journal of the American Mathematical Society. -2004. -Vol.17. -P.197-227.

21 Shestakov I.P., Umirbaev U.U. The Nagata automorphism is wild// Proc. Natl. Acad. Sci. USA.-2003. -Vol.100. -P.12561-12563.

22 Shestakov I.P., Umirbaev U.U. Poisson brackets and two generated subalgebras of rings of polynomials// Journal of the American Mathematical Society. -2004.-Vol.17.-P.181-196.

23 Умирбаев У.У. Подалгебры и автоморфизмы колец многочленов// Доклады РАН.-2002.-Vol.386, №6. -P.745-748.

24 Nagata M. On the automorphism group of $k[x, y]$// Lect. in Math. Tokio: Kyoto Univ.- 1972.

25 Umirbaev U.U. The Anick automorphism of free associative algebras// J. Reine Angew. Math. -2007. -Vol.605.-P.165-178.

26 Cohn P.M. Free rings and their relations, 2nd Ed.-London: Academic Press.-1985.

27 Smith M.K. Stably tame automorphisms// J. Pure and Appl. Algebra. -1989. -Vol.58. -P.209-212.

28 Abdykhalykov A. T., Mikhalev A. A., Umirbaev A. A. Automorphisms of two-generated free Leibniz algebras// Commun. Algebra. -2001. -Vol. 29, №7. -P. 2953-2960.

29 Магнус В. , Каррас А. , Солитэр Д. Комбинаторная теория групп. пер. с англ.-М.: Наука, 1974. -455 с.

30 Михайлова К.А. Проблема вхождения для свободных произведении групп // Матем. Сборн. -1968. -Т.75, №117.- С. 199-210.

31 Романьков В. А. Свап-гипотеза Теннанта -Тернера// Алгебра и логика. -1995. -Т. 34, № 4. -С. 448-463.

32 Jacobson N. Structure and representations of Jordan algebras// Amer. Math. Soc.

Colloq. Publ. Providence, R.I.-1968. -Vol.39. –P. 453.

33 Бахтурин Ю.А. Основные структуры современной алгебры - М.: Наука, 1990.

34 Ширшов А.И. Избранные труды. Кольца и модули. -М.: Наука, 1984.

35 Kozybaev D.Kh., Makar-Limanov L., Umirbaev U.U. The Freiheitssatz and the automorphisms of free right-symmetric algebras// Asian-European Journal of Mathematics. -2008.-Vol.1, № 2.-P.243-254.

36 Cohn P.M. Subalgebras of free associative algebras// Proc. London Math. Soc. -1964. -Vol.56. -P. 618-632.

37 Lewin J. On Schreier varieties of linear algebras// Trans.Amer.Sc.-1968.-Vol. 132. -P. 553-562.

38 Van der Essen A. Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture, Progress in Mathematics.- Basel: Birkhauser verlag.- 2000.-Vol.190.-P.329.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

39 Бейсенбаева К.Ш. О некоторых подалгебрах и автоморфизмах свободных алгебр Лейбница // Вестник КазГу. -2005. -Т. 2, №45. -С. 4-11.

40 Бейсенбаева К.Ш. Представление группы ручных автоморфизмов свободных алгебр Лейбница ранга 2, // Вестник ЕНУ. -2009. №6. -С. 171-177.

41 Бейсенбаева К.Ш. Свободное произведение алгебр Лейбница// Вестник ЕНУ. -2011. Т. 2, №81, -С.51-56.

42 Beisenbaeva K.Sh. Automorphisms of free Leibniz algebras, Model theory and algebra, France - Kazakhstan Conference, 18-22 July, 2005, Astana, Kazakhstan, -P. 12.

43 Бейсенбаева К.Ш. Почти ручные автоморфизмы свободных алгебр Лейбница ранга 2, Тезисы докладов международных научно - практических конференции "Валихановские чтения-15", 22-24 апреля, 2011, -С.71-72

44 Бейсенбаева К.Ш. Свободное произведение алгебры Лейбница, Тезисы докладов международной научной конференции студентов, магистрантов и молодых ученых "Ломоносов - 2011", 8-9 апреля, 2011, -С.28 - 30.

45 Бейсенбаева К.Ш. О некоторых подалгебрах и автоморфизмах свободных алгебр Лейбница, Тезисы докладов 10-ой Межвузовской конференции по математике и механике, Алматы. - 2004.- С.72.

46 Beisenbaeva K.Sh., Almost tame automorphisms of two generated free Leibniz algebras, The 4^{th} Congress of the Turkic World Mathematical Society (TWMS) Baku, Azerbaijan, 1-3 July, 2011, -P.8.

47 Beisenbaeva K.Sh. Almost tame automorphisms of two generated free Leibniz algebras// Communications in algebra. -2012. -Vol. 40, -P.2278-2284.