

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН  
НЕКОММЕРЧЕСКОЕ АКЦИОНЕРНОЕ ОБЩЕСТВО  
«АЛМАТИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ЭНЕРГЕТИКИ И СВЯЗИ ИМЕНИ ГУМАРБЕКА  
ДАУКЕЕВА»

ISSN 2790-0886

# В Е С Т Н И К

## АЛМАТИНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ЭНЕРГЕТИКИ И СВЯЗИ

Учрежден в июне 2008 года

Тематическая направленность: энергетика и энергетическое машиностроение, информационные,  
телекоммуникационные и космические технологии

---

**4 (63)**

**2023**

Импакт-фактор - 0.099

Научно-технический журнал  
Выходит 4 раза в год

Алматы



## ИНФОРМАЦИОННЫЕ, ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫЕ И КОСМИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ

УДК 681.5.03

[https://doi.org/10.51775/2790-0886\\_2023\\_63\\_4\\_96](https://doi.org/10.51775/2790-0886_2023_63_4_96)

### ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ОРИЕНТАЦИЕЙ СПУТНИКА В ЛИНЕЙНОЙ ФОРМЕ

М.М. Молдабеков<sup>1</sup>, А.С. Сухенко<sup>1</sup>, Е.Е. Оразалы<sup>2</sup>, А.Е. Аден<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>Институт механики и машиноведения имени академика У.А.Джолдасбекова, Алматы, Казахстан

<sup>2</sup>НАО «Алматинский университет энергетики и связи им Гумарбека Даукеева», Алматы, Казахстан

e-mail: [m.moldabekov@mail.ru](mailto:m.moldabekov@mail.ru), [y.orazaly@aes.kz](mailto:y.orazaly@aes.kz), [a.sukhenko@istt.kz](mailto:a.sukhenko@istt.kz), [a.aden@aes.kz](mailto:a.aden@aes.kz)

**Аннотация.** В данной статье представлено исследование динамики системы управления ориентацией спутника (СУОС) с применением PD-регулятора, где кинематика описывается уравнениями в кватернионах. Основной акцент сделан на актуальности представления нелинейных уравнений динамики в линейной форме, что открывает возможности для использования широкого спектра инженерных методов анализа устойчивости и синтеза параметров системы управления. Одним из ключевых результатов исследования является выявление того, что с применением теоремы об изменении кинетического момента механической системы нелинейные уравнения динамики СУОС могут быть представлены в виде линейной системы дифференциальных уравнений с переменными во времени параметрами. В заключении подчеркнуто, что необходимо понимание, что постоянные элементы матрицы системы линейных дифференциальных уравнений зависят от параметров закона управления и проекций начального значения кинетического момента спутника на оси инерциальной системы координат. В то время как переменные элементы матрицы зависят от разности текущих значений проекций кинетического момента спутника на оси инерциальной и связанной систем координат. Это исследование приводит к выводу, что динамика системы управления ориентацией спутника тесно связана со значениями параметров закона управления, а также с начальными угловыми скоростями спутника и маховиков. Развитие данной темы открывает перспективы для более глубокого понимания и оптимизации СУОС.

**Ключевые слова:** спутник, система управления ориентацией, асимптотическая устойчивость, начальная угловая скорость.

#### Введение

При разработке систем управления ориентацией спутника (СУОС) используются, как правило, PD – регуляторы [1-3]. При этом динамика СУОС описывается нелинейными дифференциальными уравнениями [4-7].

В работе [1] используется метод возмущений для линеаризации уравнений динамики СУОС с PD-регулятором. В результате получена система линейных дифференциальных уравнений с постоянными параметрами. В работе [2] используется аналогичный метод для линеаризации уравнений динамики СУОС с PID-регулятором.

В работе [3] предлагается другой подход к линеаризации уравнений динамики СУОС с PD регулятором. В этой работе вместо метода возмущений используется метод преобразования Фурье. В результате получена система линеаризованных дифференциальных уравнений с переменными во времени параметрами.

В работе [4] рассматриваются вопросы устойчивости и стабилизации линеаризованной системы управления ориентацией космического аппарата. Соответственно приводятся необходимые и

достаточные условия, гарантирующие, что рассматриваемые системы являются полиномиально устойчивыми и устойчивыми в смысле Ляпунова.

В работе [5] моделируется управление положением модели CubeSat с использованием методов нелинейного управления: линеаризации обратной связи и управления в скользящем режиме. Динамическая модель CubeSat была построена на основе системы приведения в действие маховика, которая была представлена в двух конфигурациях. Сравнивались характеристики системы автоматического управления на CubeSat в номинальном и аварийном режимах работы. Также в работе [6] рассматривается устойчивость системы автоматического управления спутником представленной нелинейными уравнениями с магнитным исполнительным органом.

В работе [7] предлагается робастный нелинейный контроллер слежения за положением жесткого космического аппарата при ограниченных входах управления и неопределенности моделирования. Ограниченность управляющих входов в регуляторе обеспечивается использованием непрерывно дифференцируемой гиперболической касательной функции и ограниченными свойствами параметров ориентации.

В этой связи для анализа устойчивости СУОС в инженерной практике используются их линеаризованные уравнения динамики [8]. Основным способом линеаризации нелинейных уравнений динамики спутника, которыми пользуются авторы, является разложение функций в правой и левой частях уравнений движения в ряд Тейлора с отбрасыванием нелинейных членов высоких порядков. Очевидным недостатком использования линеаризованных уравнений движения является то, что они описывают динамику СУОС приближенно.

Представляет значительный интерес вопрос о том, возможно ли представление уравнений динамики СУОС в линейной форме? Если да, то это дает возможность инженерам использовать при синтезе параметров СУОС имеющийся богатый арсенал удобных для практики инженерных методов анализа динамики и устойчивости линейных динамических систем, а также синтеза параметров СУОС по требуемым показателям качества переходных процессов ориентации спутника.

В работе [9] авторы для преодоления недостатка угловой скорости ввели линейную вспомогательную систему первого порядка, основанную непосредственно на векторных измерениях. Авторами получены результаты почти глобальной асимптотической устойчивости.

В работе [10] был разработан многоцелевой регулятор на основе линейной модели динамики ориентации. При оценке эффективности учитывались как устойчивость к неопределенности момента инерции, так и отклонение возмущений.

Книга [11] посвящена вопросам применения аппарата кватернионов к общим теоретическим проблемам кинематики вращательного движения твердого тела и к практическим задачам управления. Теория конечного поворота и кинематика углового движения твердого тела представлены на основе операций умножения кватернионов. Рассмотрены вопросы исследования кинематических уравнений и их численного интегрирования, вопросы использования кватернионов в задачах управления угловым движением твердого тела и оптимизации пространственных разворотов.

В работе [12] используются не приближенные линеаризованные уравнения динамики СУОС, а нелинейные уравнения динамики СУОС, записанные в форме линейной системы дифференциальных уравнений, элементы матрицы которой являются функциями вектора состояния системы. Однако, зависимость элементов матрицы линейной системы от вектора ее состояния по сути сохраняет нелинейный характер уравнений динамики и, как следствие, ограничивает эквивалентность линейной модели локальной областью рассматриваемого вектора состояния системы.

В работе [13] исследуются нелинейные уравнения динамики СУОС с маховиками, полученные для не измеряемых физически переменных вектора состояния СУОС, и показана возможность представления исходных нелинейных уравнений динамики СУОС в форме линейной системы дифференциальных уравнений, элементы матрицы которой являются функциями кинетического момента механической системы. Показаны возможности применения линейной формы уравнений

динамики СУОС как для анализа ее устойчивости, так и для синтеза параметров закона управления по требуемым показателям качества переходных процессов ориентации спутника.

В данной статье изложены результаты исследования динамики СУОС с PD – регулятором, кинематика которой описывается уравнениями в кватернионах. Показано, что на основе теоремы об изменении кинетического момента механической системы, приведенной в работе [14], нелинейные уравнения динамики СУОС могут быть представлены в виде линейной системы дифференциальных уравнений с переменными во времени параметрами.

### Математическая модель системы управления ориентацией спутника

Для описания ориентации спутника введем следующие системы координат и их обозначения (Рисунок 1):  $OXYZ$  - неподвижная инерциальная система координат (ИСК), начало которой находится в центре масс Земли (точка  $O$ ), ось  $OX$  лежит в экваториальной плоскости и направлена в точку весеннего равноденствия, ось  $OZ$  совпадает с осью вращения Земли и направлена на северный полюс Земли, ось  $OY$  дополняет систему до правой;  $Sxyz$  - подвижная связанная система координат (ССК), начало которой находится в центре масс спутника (точка  $C$ ), оси данной системы координат совпадают с главными центральными осями инерции спутника.

Для описания динамики спутника применим динамические уравнения Эйлера для вращательного движения твердого тела с неподвижной точкой [14]:

$$J \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times (J \vec{\omega} + J_M \vec{\omega}_M) = -J_M \dot{\vec{\omega}}_M, \quad (1)$$

где  $J = \{J_1, J_2, J_3\}$  - диагональная (3x3) матрица тензора инерции спутника;  $J_1, J_2, J_3$  - главные центральные моменты инерции спутника;  $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$  - вектор абсолютной угловой скорости спутника в проекциях на оси ССК;  $J_M = \{J_{M1}, J_{M2}, J_{M3}\}$  - диагональная (3x3) - матрица тензора инерции маховиков;  $J_{M1}, J_{M2}, J_{M3}$  - моменты инерции маховиков, установленных вдоль осей  $x, y, z$  соответственно;  $\vec{\omega}_M = (\omega_{M1}, \omega_{M2}, \omega_{M3})^T$  - вектор угловых скоростей маховиков.

Уравнение (1) характеризует изменение вектора угловой скорости спутника под действием вектора управляющих моментов маховиков и в скалярной форме имеет вид:

$$\begin{aligned} J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3 + J_{M3} \omega_{M3} \omega_2 - J_{M2} \omega_{M2} \omega_3 &= M_1, \\ J_2 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \omega_1 \omega_3 + J_{M1} \omega_{M1} \omega_3 - J_{M3} \omega_{M3} \omega_1 &= M_2, \\ J_3 \dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1) \omega_1 \omega_2 + J_{M2} \omega_{M2} \omega_1 - J_{M1} \omega_{M1} \omega_2 &= M_3, \end{aligned} \quad (2)$$

где через  $M_i = -J_{Mi} \dot{\omega}_{Mi}$ , ( $i = \overline{1,3}$ ) обозначены управляющие моменты маховиков.

Закон управления с обратной связью примем в виде линейной функции:

$$M_i = -h_i \omega_i - \alpha_i \lambda_i, \quad (i = \overline{1,3}), \quad (3)$$

где  $h_i, \alpha_i$ , ( $i = \overline{1,3}$ ) - неизвестные произвольные параметры закона управления, которые должны быть определены из условий устойчивости движения и обеспечения требуемых характеристик переходного процесса ориентации спутника.

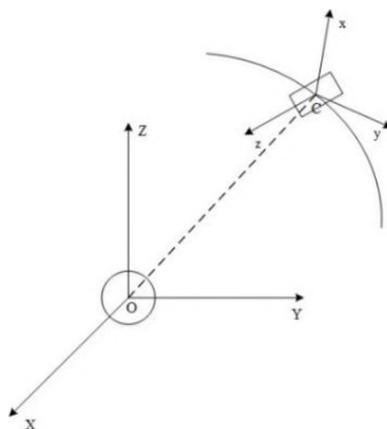


Рисунок 1. Системы координат

Для описания кинематики вращательного движения спутника применим кинематические уравнения Пуассона, записанные с использованием кватернионов [10,11]:

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2} \Lambda \bar{\omega}, \quad (4)$$

где  $\Lambda(t)$  – нормированный кватернион перехода от неподвижного базиса  $I$  с ортами, совпадающими с ортами ИСК, к подвижному базису  $E$  с ортами, совпадающими с ортами ССК. Этот кватернион задает поворот от базиса  $I$  в базис  $E$  и выражен через параметры Родрига-Гамильтона, т. е. орты базисов  $I$  и  $E$  связаны формулой:

$$\bar{e}_k = \Lambda \cdot \bar{i}_k \cdot \bar{\Lambda}, \quad (k = \overline{1,3}).$$

Уравнение (4) характеризует изменение параметров кватерниона в зависимости от вектора угловой скорости спутника и в скалярной форме имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} 2\dot{\lambda}_0 &= -\omega_1\lambda_1 - \omega_2\lambda_2 - \omega_3\lambda_3, \\ 2\dot{\lambda}_1 &= \omega_1\lambda_0 + \omega_3\lambda_2 - \omega_2\lambda_3, \\ 2\dot{\lambda}_2 &= \omega_2\lambda_0 + \omega_1\lambda_3 - \omega_3\lambda_1, \\ 2\dot{\lambda}_3 &= \omega_3\lambda_0 + \omega_2\lambda_1 - \omega_1\lambda_2, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где  $\lambda_i = \lambda_i(t)$ ,  $(i = \overline{0,3})$  – параметры Родрига-Гамильтона кватерниона  $\Lambda(t)$ .

Введем параметр  $\hat{\lambda}_0$ , связанный с параметром  $\lambda_0$  следующим образом:

$$\lambda_0(t) = 1 - \hat{\lambda}_0(t), \quad \dot{\lambda}_0(t) = -\dot{\hat{\lambda}}_0(t). \quad (6)$$

Тогда равенства, соответствующие совпадению орт базиса  $E$  с ортами базиса  $I$ , запишутся в виде:

$$\hat{\lambda}_0 = 0, \quad \bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T = 0. \quad (7)$$

В системе семи нелинейных уравнений (2) и (5) семь неизвестных, среди которых только шесть независимы между собой, так как из четырех параметров кватерниона  $\lambda_j(t)$ , ( $j = \overline{0,3}$ ) независимыми являются только три. Удобно далее рассматривать в качестве независимых последние шесть уравнений системы (2) и (5).

### Линейная форма уравнений динамики системы управления ориентацией спутника

Рассмотрим линейные функции угловых скоростей спутника и маховиков

$$C_i(t) = J_i \omega_i(t) + J_{Mi} \omega_{Mi}(t), (i = \overline{1,3}), \quad (8)$$

выражающие проекции кинетического момента спутника как физической величины на оси ССК  $C_{xyz}$ . Здесь  $\omega_i(t)$ ,  $\omega_{Mi}(t)$ ,  $i = \overline{1,3}$  - непрерывные ограниченные функции времени  $t \in [t_0, \infty)$  в силу ограниченной мощности двигателей маховиков. Очевидно, что в силу непрерывности по времени  $t$  и ограниченности угловых скоростей спутника и маховиков кинетические моменты спутника как физические величины являются ограниченными функциями времени, т. е.  $C_i(t) < \infty$ , ( $i = \overline{1,3}$ ),  $t \in [t_0, \infty)$ .

С учетом равенств (8) система уравнений (2) и (5) без первого уравнения принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= \frac{1}{2} [(1 - \hat{\lambda}_0) \omega_1 - \lambda_3 \omega_2 + \lambda_2 \omega_3], \\ \dot{\omega}_1 &= \frac{1}{J_1} (-h_1 \omega_1 - \alpha_1 \lambda_1 - C_3 \omega_2 + C_2 \omega_3), \\ \dot{\lambda}_2 &= \frac{1}{2} [\lambda_3 \omega_1 + (1 - \hat{\lambda}_0) \omega_2 - \lambda_1 \omega_3], \\ \dot{\omega}_2 &= \frac{1}{J_2} (-h_2 \omega_2 - \alpha_2 \lambda_2 + C_3 \omega_1 - C_1 \omega_3), \\ \dot{\lambda}_3 &= \frac{1}{2} [-\lambda_2 \omega_1 + \lambda_1 \omega_2 + (1 - \hat{\lambda}_0) \omega_3], \\ \dot{\omega}_3 &= \frac{1}{J_3} (-h_3 \omega_3 - \alpha_3 \lambda_3 - C_2 \omega_1 + C_1 \omega_2), \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Из вида уравнений (9) следует, что параметры кватерниона  $\lambda_j(t)$ , ( $j = \overline{0,3}$ ) являются непрерывными, непрерывно-дифференцируемыми ограниченными функциями времени  $t \in [t_0, \infty)$ . При этих условиях система уравнений (9) удовлетворяет теореме Коши о существовании и единственности ее решения [14] при задании начальных условий по угловым скоростям и угловым положениям  $\omega_i(t_0)$ ,  $\omega_{Mi}(t_0)$ ,  $i = \overline{1,3}$ ,  $\lambda_j(t_0)$ , ( $j = \overline{0,3}$ ).

Очевидно, что система шести нелинейных дифференциальных уравнений (9) имеет тривиальное решение:

$$X = (\lambda_1, \omega_1, \lambda_2, \omega_2, \lambda_3, \omega_3)^T = (0, 0, 0, 0, 0, 0)^T, \quad (10)$$

которое соответствует совмещению базиса  $E$  с базисом  $I$ .

В матричной форме система (14) имеет вид:

$$\dot{X} = AX + f(X), \quad (11)$$

где

$$X = (x_1, \dots, x_6)^T \equiv (\lambda_1, \omega_1, \lambda_2, \omega_2, \lambda_3, \omega_3)^T, \quad f(X) = (f_1(X), \dots, f_6(X))^T,$$

$A = A_{6 \times 6}$  - квазидиагональная матрица с постоянными элементами:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha_1}{J_1} & -\frac{h_1}{J_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\alpha_2}{J_2} & -\frac{h_2}{J_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha_3}{J_3} & -\frac{h_3}{J_3} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} f_1(X) &= \frac{1}{2}(-\hat{\lambda}_0\omega_1 - \lambda_3\omega_2 + \lambda_2\omega_3), & f_2(X) &= \frac{1}{J_1}(-C_3\omega_2 + C_2\omega_3), \\ f_3(X) &= \frac{1}{2}(\lambda_3\omega_1 - \hat{\lambda}_0\omega_2 - \lambda_1\omega_3), & f_4(X) &= \frac{1}{J_2}(C_3\omega_1 - C_1\omega_3), \\ f_5(X) &= \frac{1}{2}(-\lambda_2\omega_1 + \lambda_1\omega_2 - \hat{\lambda}_0\omega_3), & f_6(X) &= \frac{1}{J_3}(-C_2\omega_1 + C_1\omega_2). \end{aligned} \quad (13)$$

Проекции кинетического момента механической системы в начальный момент времени  $t_0$  определяются из начальных условий по угловым скоростям вращения спутника и маховиков вокруг осей ССК:

$$C_i(t_0) = J_i\omega_i(t_0) + J_{Mi}\omega_{Mi}(t_0), (i = \overline{1,3}). \quad (14)$$

Введем вектор-столбец проекций кинетического момента на орты базиса  $E$ :

$$\bar{C}_E(t) = [C_{E1}(t), C_{E2}(t), C_{E3}(t)]^T \equiv [C_1(t), C_2(t), C_3(t)]^T, t \in [t_0, \infty). \quad (15)$$

Определим отсюда вектор-столбец  $\bar{C}_I = [C_{I1}, C_{I2}, C_{I3}]^T$  проекций кинетического момента на орты базиса  $I$  в начальный момент времени  $t_0$ :

$$\bar{C}_I(t_0) = \Lambda(t_0) \cdot \bar{C}_E(t_0) \cdot \bar{\Lambda}(t_0), \quad (16)$$

где  $\Lambda(t_0) = [\lambda_0(t_0), \lambda_1(t_0), \lambda_2(t_0), \lambda_3(t_0)]^T \equiv [\lambda_0^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \lambda_3^0]^T$ .

Согласно теореме об изменении кинетического момента механической системы [14] проекции кинетического момента механической системы на орты базиса  $I$ , определяемые равенством (16), являются константами:

$$C_{ii}^0 = C_{ii}(t_0) = const, (i = \overline{1,3})$$

и определяются по следующим формулам [11]:

$$\left. \begin{aligned} C_{I1}^0 &= (\lambda_0^{02} + \lambda_1^{02} - \lambda_2^{02} - \lambda_3^{02})C_1(t_0) + 2(\lambda_1^0\lambda_2^0 - \lambda_0^0\lambda_3^0)C_2(t_0) + 2(\lambda_1^0\lambda_3^0 + \lambda_0^0\lambda_2^0)C_3(t_0), \\ C_{I2}^0 &= 2(\lambda_1^0\lambda_2^0 + \lambda_0^0\lambda_3^0)C_1(t_0) + (\lambda_0^{02} + \lambda_2^{02} - \lambda_1^{02} - \lambda_3^{02})C_2(t_0) + 2(\lambda_2^0\lambda_3^0 - \lambda_0^0\lambda_1^0)C_3(t_0), \\ C_{I3}^0 &= 2(\lambda_1^0\lambda_3^0 - \lambda_0^0\lambda_2^0)C_1(t_0) + 2(\lambda_2^0\lambda_3^0 + \lambda_0^0\lambda_1^0)C_2(t_0) + (\lambda_0^{02} + \lambda_3^{02} - \lambda_1^{02} - \lambda_2^{02})C_3(t_0) \end{aligned} \right\}. \quad (17)$$

Проекции  $C_i(t) < \infty, (i = \overline{1,3})$  на оси подвижной ССК будут не константами, а функциями углов поворота ССК относительно ИСК, т.е. функциями параметров кватерниона  $\Lambda(t)$ :

$$\bar{C}_E(t) = \bar{\Lambda}(t) \cdot \bar{C}_I^0 \cdot \Lambda(t). \quad (18)$$

В координатной форме проекции вектор-столбца  $\bar{C}_E(t)$  на орты базиса  $E$  определяются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} C_{E1} &= (\lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2)C_{I1}^0 + 2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_0\lambda_3)C_{I2}^0 + 2(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2)C_{I3}^0, \\ C_{E2} &= 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0\lambda_3)C_{I1}^0 + (\lambda_0^2 + \lambda_2^2 - \lambda_1^2 - \lambda_3^2)C_{I2}^0 + 2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1)C_{I3}^0, \\ C_{E3} &= 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2)C_{I1}^0 + 2(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_0\lambda_1)C_{I2}^0 + (\lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2)C_{I3}^0, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

где  $C_{Ei} = C_{Ei}(t), (i = \overline{1,3}), \lambda_j = \lambda_j(t), (j = \overline{0,3})$ .

Подставим значения  $\lambda_0(t)$  из равенств (6) в коэффициенты уравнений (19) и представим их в компактном виде

$$C_{Ei}(t) = \sum_{j=1}^3 a_{ij}(t)C_{Ij}^0, (i = \overline{1,3}), t \in [t_0, \infty], \quad (20)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_{11}(t) &= 1 - 2\hat{\lambda}_0(t) + \hat{\lambda}_0^2(t) + \lambda_1^2(t) - \lambda_2^2(t) - \lambda_3^2(t) = 1 + b_{11}(t); \\ a_{22}(t) &= 1 - 2\hat{\lambda}_0(t) + \hat{\lambda}_0^2(t) + \lambda_2^2(t) - \lambda_1^2(t) - \lambda_3^2(t) = 1 + b_{22}(t); \\ a_{33}(t) &= 1 - 2\hat{\lambda}_0(t) + \hat{\lambda}_0^2(t) + \lambda_3^2(t) - \lambda_1^2(t) - \lambda_2^2(t) = 1 + b_{33}(t); \\ a_{12}(t) &= 2[\lambda_1(t)\lambda_2(t) - (1 - \hat{\lambda}_0(t))\lambda_3(t)] = b_{12}(t); \\ a_{13}(t) &= 2[\lambda_1(t)\lambda_3(t) + (1 - \hat{\lambda}_0(t))\lambda_2(t)] = b_{13}(t); \\ a_{21}(t) &= 2[\lambda_1(t)\lambda_2(t) + (1 - \hat{\lambda}_0(t))\lambda_3(t)] = b_{21}(t); \\ a_{23}(t) &= 2[\lambda_2(t)\lambda_3(t) - (1 - \hat{\lambda}_0(t))\lambda_1(t)] = b_{23}(t); \\ a_{31}(t) &= 2[\lambda_1(t)\lambda_3(t) - (1 - \hat{\lambda}_0(t))\lambda_2(t)] = b_{31}(t); \\ a_{32}(t) &= 2[\lambda_2(t)\lambda_3(t) + (1 - \hat{\lambda}_0(t))\lambda_1(t)] = b_{32}(t). \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Уравнения (20) с учетом (21) можно записать в виде:

$$C_{Ei}(t) = C_{Ii}^0 + \sum_{j=1}^3 b_{ij}(t)C_{Ij}^0 = C_{Ii}^0 + B_i(t), (i = \overline{1,3}). \quad (22)$$

С учетом равенств (13), (15) и (22) нелинейную систему дифференциальных уравнений (11) можно записать в виде эквивалентной ей линейной системы дифференциальных уравнений с переменными во времени параметрами, которая в матричной форме имеет вид:

$$\dot{X} = [A + C^0 + L(t)]X, \quad (23)$$

где  $A + C^0 + L(t)$  - матрица, элементы которой имеют постоянные и переменные во времени слагаемые:

$A$  - матрица с постоянными элементами, определяемая по формуле (12), и матрицы

$$C^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{C_{I3}^0}{J_1} & 0 & \frac{C_{I2}^0}{J_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{C_{I3}^0}{J_2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{C_{I1}^0}{J_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{C_{I2}^0}{J_3} & 0 & \frac{C_{I1}^0}{J_3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad L(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\hat{\lambda}_0(t)}{2} & 0 & -\frac{\lambda_3(t)}{2} & 0 & \frac{\lambda_2(t)}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{B_3(t)}{J_1} & 0 & \frac{B_2(t)}{J_1} \\ 0 & \frac{\lambda_3(t)}{2} & 0 & -\frac{\hat{\lambda}_0(t)}{2} & 0 & -\frac{\lambda_1(t)}{2} \\ 0 & \frac{B_3(t)}{J_2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{B_1(t)}{J_2} \\ 0 & -\frac{\lambda_2(t)}{2} & 0 & \frac{\lambda_1(t)}{2} & 0 & -\frac{\hat{\lambda}_0(t)}{2} \\ 0 & -\frac{B_2(t)}{J_3} & 0 & \frac{B_1(t)}{J_3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

### Выводы

1. Нелинейные уравнения динамики системы управления ориентацией спутника с маховиками, кинематика которой описывается уравнениями в кватернионах, могут быть представлены в виде системы линейных дифференциальных уравнений с переменными во времени параметрами.

2. Постоянные элементы матрицы системы линейных дифференциальных уравнений зависят от параметров закона управления и значений проекций кинетического момента спутника на оси

инерциальной системы координат, а переменные элементы матрицы зависят от разности значений проекций кинетического момента спутника на оси инерциальной и связанной систем координат.

3. Динамика системы управления ориентацией спутника определяется значениями параметров закона управления и начальными угловыми скоростями спутника и маховиков.

### Благодарности

Данное исследование выполнено и финансируется: №BR20280990 «Разработка и развитие методов решения фундаментальных задач механики жидкости и газа, новых деформируемых тел, надежности и энергоэффективности машин, механизмов, робототехники».

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ/ LIST OF REFERENCES

1. Moldabekov M., Yelubayev S., Alipbayev K., Sukhenko A., Bopeyev T., Mikhailenko D. Stability analysis of the microsatellite attitude control system // Applied mechanics and materials. – 2015. – Vol. 798. – P. 297-302.
2. Moldabekov M., Akhmedov D., Yelubaev S., Alipbayev K., Sukhenko A. Optimal synthesis of satellite orientation system's parameters // Advances in the astronautical science. – 2017. – Vol. 161. – P. 989-997.
3. Doruk R.O., 2009, Linearization in satellite attitude control with modified Rodriguez parameters, Aircraft engineering and aerospace technology: an international journal, 81/3, 199–203.
4. Zhou B. On stability of the linearized spacecraft attitude control system, 2015. <https://arxiv.org/pdf/1504.00114.pdf>
5. Andrew Newton, Elyse Hill, S. Andrew Gadsden<sup>1</sup>, Mohammad Biglarbegian, and Simon Yang. Investigating Reaction Wheel Configuration and Control Law Pairings for CubeSats in the Presence of Faults. Proceedings of the Canadian Society for Mechanical Engineering International Congress 2020 CSME Congress 2020 June 21-24, 2020, Charlottetown, PE, Canada.
6. Mayhew, C. G., Sanfelice, R. G., and Teel, A. R., “Robust Global Asymptotic Attitude Stabilization of a Rigid Body by Quaternion-Based Hybrid Feedback,” Proceedings of the 48th IEEE Conference on IEEE, IEEE Publ., Piscataway, NJ, 2009.
7. Pukdeboon. Output Feedback Control for Asymptotic Stabilization of Spacecraft with Input Saturation 2017, J of Control Science and Engineering.
8. Liang Sun, Bing Zhu. Robust Nonlinear Attitude Tracking for Rigid Spacecraft with Constrained Control Inputs. 2018, International Conference on Advanced Robotics and Mechatronics.
9. L. Benziane, A. Benallegue, Abdelhamid Tayebi .Attitude stabilization without angular velocity measurements. 2014, IEEE International Conference on Robotics and Automation.
10. Baolin Wu Xibin Cao Zhengxue Li Multi-objective output-feedback control for microsatellite attitude control: An LMI approach.
11. Branets V.N., Shmyglevski I.P. Applying Quaternions to Rigid Body Orientation Problems. M., Nauka, 1973. – 329p.
12. A.G.Romero, L.C.Souza. Satellite Controller System Based on Reaction Wheels Using the State-Dependent Riccati Equation (SDRE) on Java. C Springer Nature Switzerland AG 2019 IFToMM 2018.61, pp. 547-561, 2019. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-99268-6\\_38](https://doi.org/10.1007/978-3-319-99268-6_38).
13. Moldabekov M., Sukhenko A., Shapovalova D., Yelubayev S. Using the linear form of equations of dynamics of satellite attitude control system for its analysis and synthesis // Journal of Theoretical and Applied Mechanics. 59, 1, 2020, pp.109-120. DOI: 10.15632/jtam-pl/129071.
14. Markeev A.P., 1999, Theoretical mechanics: a textbook for universities (in Russian), CheRo, Moscow, 1999. – 572 p.

# REPRESENTATION OF THE NONLINEAR EQUATIONS OF DYNAMICS OF THE SATELLITE ATTITUDE CONTROL SYSTEM IN LINEAR FORM

M.M. Moldabekov<sup>1</sup>, A.S. Suhenko<sup>1</sup>, Ye.Ye. Orazaly<sup>2</sup>, A.E. Aden<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>U.A. Joldasbekov Institute of Mechanics and Engineering, Almaty, Kazakhstan

<sup>2</sup>“Almaty University of Power Engineering and Telecommunications named after Gumarbek Daukeyev”, Almaty, Kazakhstan

e-mail: [m.moldabekov@mail.ru](mailto:m.moldabekov@mail.ru), [y.orazaly@aes.kz](mailto:y.orazaly@aes.kz), [a.sukhenko@istt.kz](mailto:a.sukhenko@istt.kz), [a.aden@aes.kz](mailto:a.aden@aes.kz)

**Abstract.** In this article, a study of the dynamics of a satellite attitude control system using a PD controller is presented. Kinematics is described by equations in quaternions. The main emphasis is on the relevance of representing nonlinear dynamics equations in linear form. This opens up opportunities for the use of a wide range of engineering methods for stability analysis and synthesis of control system parameters. One of the key results of the study is the revelation that, using the theorem on the change in the angular momentum of a mechanical system, the nonlinear equations of the dynamics of the satellite attitude control system can be represented as a linear system of differential equations with time-varying parameters. In conclusion, it is emphasized that it is necessary to understand that the constant elements of the matrix of the system of linear differential equations depend on the parameters of the control law and the projections of the initial value of the angular momentum of the satellite on the axis of the inertial coordinate system. While the variable elements of the matrix depend on the difference in the current values of the projections of the angular momentum of the satellite on the axes of the inertial and coupled coordinate systems. This study leads to the conclusion that the dynamics of the satellite attitude control system are closely related to the values of the control law parameters, as well as to the initial angular velocities of the satellite and flywheels. The development of this topic opens up prospects for a deeper understanding and optimization of the satellite attitude control system.

**Key words:** satellite, attitude control system, asymptotic stability, initial angular velocity.

## ЖЕРСЕРІКТІҢ БАҒДАРЫН БАСҚАРУ ЖҮЙЕСІ ДИНАМИКАСЫНЫҢ СЫЗЫҚТЫҚ ЕМЕС ТЕҢДЕУЛЕРІН СЫЗЫҚТЫҚ ТҮРДЕ ҰСЫНУ

М.М. Молдабеков<sup>1</sup>, А.С. Сухенко<sup>1</sup>, Е.Е. Оразалы<sup>2</sup>, Ә.Е. Әден<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>Ө.А. Жолдасбеков атындағы Механика және машинатану институты, Алматы қаласы, Қазақстан

<sup>2</sup>“Ғұмарбек Даукеев атындағы Алматы энергетика және байланыс университеті» КЕАҚ, Алматы, Қазақстан

e-mail: [m.moldabekov@mail.ru](mailto:m.moldabekov@mail.ru), [y.orazaly@aes.kz](mailto:y.orazaly@aes.kz), [a.sukhenko@istt.kz](mailto:a.sukhenko@istt.kz), [a.aden@aes.kz](mailto:a.aden@aes.kz)

**Аңдатпа.** Бұл мақалада кинематика кватерниондардағы теңдеулермен сипатталатын PD-реттегішін қолдана отырып, жерсеріктік бағдарлауды басқару жүйесінің (ЖББЖ) динамикасын зерттеу ұсынылған. Динамиканың сызықтық емес теңдеулерін сызықтық түрде ұсынудың өзектілігіне баса назар аударылды, бұл тұрақтылықты талдаудың және басқару жүйесінің өлшемдерін синтездеудің инженерлік әдістерінің кең спектрін қолдануға мүмкіндік береді. Зерттеудің негізгі нәтижелерінің бірі механикалық жүйенің кинетикалық сәтінің өзгеруі туралы теореманы қолдану арқылы сызықтық емес ЖББЖ динамикалық теңдеулерін уақыт айнымалылары өлшемдері бар сызықтық дифференциалдық теңдеулер жүйесі ретінде ұсынуға болатындығын анықтау болып табылады. Қорытындыда сызықтық дифференциалдық теңдеулер жүйесі матрицасының тұрақты элементтерін басқару Заңының параметрлеріне және инерциялық координаттар жүйесінің осіндегі жерсеріктің кинетикалық сәтінің бастапқы мәнінің проекцияларына тәуелді екенін түсіну қажет екендігі атап өтілді. Матрицаның айнымалы элементтері жерсеріктің кинетикалық сәті проекцияларының инерциялық және байланысқан координаттар жүйелерінің осіндегі ағымдағы мәндерінің айырмашылығына байланысты. Бұл зерттеу жерсеріктік бағдарлауды басқару жүйесінің динамикасы басқару заңы өлшемдерінің мәндерімен, сондай-ақ спутник пен маховиктердің бастапқы бұрыштық жылдамдықтарымен тығыз байланысты деген қорытындыға әкеледі. Бұл тақырыпты дамыту ЖББЖ-ны оңтайландыру мен тереңірек түсінуге барынша жаңа мүмкіндіктер береді.

**Түйін сөздер:** жерсеріктік, қарым-қатынасты басқару жүйесі, симптомсыз тұрақтылық, бастапқы бұрыштық жылдамдық.