

12013

42157

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ  
ДЛЯ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ  
ИНСТИТУТОВ

# ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА



# ОГЛАВЛЕНИЕ

## Раздел I АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

	Глава I Элементы векторной и линейной алгебры
§ 1. Векторы. Операции над векторами . . . . .	3
1. Скалярные и векторные величины . . . . .	—
2. Угол между векторами. Проекция вектора на ось . . . . .	5
3. Сумма векторов . . . . .	6
4. Разность двух векторов . . . . .	9
5. Произведение вектора на число . . . . .	—
Упражнения . . . . .	13
§ 2. Координаты вектора и координаты точки . . . . .	13
1. Прямоугольная декартова система координат на плоскости . . . . .	—
2. Прямоугольная декартова система координат в пространстве . . . . .	14
3. Координаты суммы, разности векторов и произведения вектора на число . . . . .	15
4. Координаты точки . . . . .	16
5. Координаты точки, делящей отрезок в данном отношении . . . . .	—
Упражнения . . . . .	18
§ 3. Скалярное произведение векторов . . . . .	18
1. Определение скалярного произведения векторов . . . . .	—
2. Свойства скалярного произведения векторов . . . . .	19
3. Скалярное произведение векторов, заданных своими координатами . . . . .	21
Упражнения . . . . .	23
§ 4. Определители второго и третьего порядка . . . . .	24
1. Определитель второго порядка . . . . .	—
2. Определитель третьего порядка . . . . .	25
3. Решение систем линейных уравнений с помощью определителей . . . . .	27
Упражнения . . . . .	30
§ 5. Векторное произведение двух векторов. Смешанное произведение трех векторов . . . . .	31
1. Определение векторного произведения . . . . .	—
2. Свойства векторного произведения . . . . .	33
3. Векторное произведение векторов, заданных своими координатами . . . . .	34
4. Смешанное произведение трех векторов и его геометрический смысл . . . . .	36
Упражнения . . . . .	38

Глава II  
Аналитическая геометрия  
на плоскости

§ 6. Линии на плоскости . . . . .	39
1. Уравнения линий на плоскости . . . . .	—
2. Полярная система координат . . . . .	—
Упражнения . . . . .	41
§ 7. Прямая . . . . .	41
1. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки. Уравнение прямой в отрезках . . . . .	—
2. Угловой коэффициент прямой . . . . .	43
3. Уравнение прямой, проходящей через данную точку параллельно данному вектору . . . . .	44
4. Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору . . . . .	—
5. Общее уравнение прямой на плоскости . . . . .	45
Упражнения . . . . .	46
§ 8. Решение некоторых задач . . . . .	47
1. Вычисление угла между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых . . . . .	—
2. Вычисление расстояния от данной точки до данной прямой . . . . .	49
Упражнения . . . . .	51
§ 9. Кривые второго порядка . . . . .	51
1. Уравнение второго порядка с двумя переменными . . . . .	—
2. Эллипс . . . . .	52
3. Гипербола . . . . .	54
4. Парабола . . . . .	57
5. Общее уравнение второго порядка . . . . .	58
Упражнения . . . . .	59

Глава III  
Аналитическая геометрия  
в пространстве

§ 10. Плоскость . . . . .	61
1. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки . . . . .	—
2. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору . . . . .	—
Упражнения . . . . .	63
§ 11. Прямая в пространстве . . . . .	63
1. Уравнение прямой, проходящей через две точки . . . . .	—
2. Уравнение прямой, проходящей через данную точку параллельно данному вектору . . . . .	64
3. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости . . . . .	65
Упражнения . . . . .	67
§ 12. Решение некоторых задач стереометрии методами аналитической геометрии . . . . .	67
1. Решение стереометрических задач методами векторной алгебры . . . . .	—
2. Вычисление расстояния от данной точки до данной плоскости . . . . .	69
Упражнения . . . . .	72
§ 13. Поверхности второго порядка . . . . .	72
1. Общее уравнение второго порядка с тремя переменными . . . . .	—
2. Эллиптический, гиперболический и параболический цилиндры . . . . .	73

3. Эллипсоид . . . . .	74
4. Двуполостный гиперболоид . . . . .	76
5. Однополостный гиперболоид . . . . .	78
6. Эллиптический параболоид . . . . .	79
7. Гиперболический параболоид . . . . .	80
8. Конус . . . . .	81
Упражнения . . . . .	82

## Раздел II МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

### Глава IV Действительные и комплексные числа

<b>§ 14. Простейшие понятия теории множеств . . . . .</b>	<b>84</b>
1. Множество и его элементы. Подмножества . . . . .	—
2. Пересечение и объединение множеств . . . . .	85
3. Вычитание множеств. Дополнение до множества. Прямое произведение двух множеств . . . . .	86
Упражнения . . . . .	87
<b>§ 15. Множество действительных чисел . . . . .</b>	<b>88</b>
1. Рациональные числа . . . . .	—
2. Действительные числа . . . . .	90
3. Абсолютная величина (модуль) действительного числа . . . . .	91
Упражнения . . . . .	93
<b>§ 16. Числовые множества. Промежутки. Окрестность точки . . . . .</b>	<b>94</b>
1. Промежутки . . . . .	—
2. Ограниченные и неограниченные числовые множества . . . . .	95
3. Числовая плоскость . . . . .	—
Упражнения . . . . .	96
<b>§ 17. Множество комплексных чисел . . . . .</b>	<b>96</b>
1. Комплексные числа . . . . .	—
2. Модуль комплексного числа . . . . .	99
Упражнения . . . . .	100
<b>§ 18. Комплексная плоскость. Аргумент комплексного числа. Подмножества комплексных чисел . . . . .</b>	<b>101</b>
1. Комплексная плоскость . . . . .	—
2. Аргумент комплексного числа . . . . .	—
Упражнения . . . . .	103

### Глава V. Функции. Последовательности. Пределы

<b>§ 19. Функции . . . . .</b>	<b>104</b>
1. Понятие функции . . . . .	—
2. Числовые функции. Способы задания функции . . . . .	—
3. Ограниченность, монотонность, четность и периодичность функции . . . . .	106
Упражнения . . . . .	108
<b>§ 20. Обратная функция. Простейшие элементарные функции . . . . .</b>	<b>110</b>
1. Функция, обратная данной функции . . . . .	—
2. Простейшие элементарные функции . . . . .	111
Упражнения . . . . .	117

§ 21. Сложная функция. Класс элементарных функций. Многочлены. Рациональные функции . . . . .	118
1. Сложная функция . . . . .	—
2. Многочлены . . . . .	120
3. Рациональные функции . . . . .	121
4. Алгебраические функции. Трансцендентные функции . . . . .	123
5. Элементарные функции . . . . .	—
Упражнения . . . . .	—
§ 22. Последовательности . . . . .	125
1. Числовые последовательности . . . . .	—
2. Ограниченные и монотонные последовательности . . . . .	127
Упражнения . . . . .	128
§ 23. Предел последовательности . . . . .	129
1. Предел числовой последовательности. Сходящиеся и расходящиеся числовые последовательности . . . . .	—
2. Бесконечно малые последовательности . . . . .	—
3. Теоремы о пределах последовательностей, связанные с арифметическими действиями . . . . .	133
4. Теоремы о пределах, связанные с неравенствами . . . . .	134
5. Бесконечно большие последовательности . . . . .	136
6. Существование предела монотонной последовательности. Число $e$ . . . . .	138
Упражнения . . . . .	139
§ 24. Предел функции . . . . .	140
1. Предел функции в точке . . . . .	—
2. Теоремы о пределах функций, связанные с арифметическими действиями . . . . .	142
3. Теоремы о пределах функций, связанные с неравенствами . . . . .	143
4. Односторонние пределы . . . . .	—
5. О пределе функции при $x \rightarrow \pm \infty$ . . . . .	145
6. Бесконечные пределы. Бесконечно малые и бесконечно большие функции . . . . .	146
Упражнения . . . . .	147
§ 25. Непрерывность функций . . . . .	148
1. Непрерывность функции в точке . . . . .	—
2. Свойства функций, непрерывных в точке . . . . .	150
3. Непрерывность функции на множестве . . . . .	—
4. Точки разрыва и их классификация . . . . .	151
Упражнения . . . . .	152
§ 26. Непрерывность элементарных функций. Замечательные пределы . . . . .	153
1. Непрерывность простейших элементарных функций . . . . .	—
2. Замечательные пределы . . . . .	157
Упражнения . . . . .	159

Глава VI

Элементы дифференциального исчисления функций  
одной переменной

§ 27. Производная . . . . .	160
1. Задачи, приводящие к понятию производной . . . . .	—
2. Производная функции . . . . .	162
3. Физический и геометрический смысл производной . . . . .	163
4. Вычисление производной на основе ее определения . . . . .	164
5. Непрерывность дифференцируемой функции . . . . .	165
Упражнения . . . . .	166
§ 28. Производная суммы, разности, произведения и частного функций . . . . .	167
1. Производная суммы и разности функций . . . . .	—

2. Производная произведения функций . . . . .	167
3. Производная частного двух функций . . . . .	168
Упражнения . . . . .	169
<b>§ 29. Производная сложной, обратной и параметрически заданной функций</b>	<b>169</b>
1. Производная сложной функции . . . . .	—
2. Производная обратной функции . . . . .	171
3. Производная параметрически заданной функции . . . . .	—
Упражнения . . . . .	172
<b>§ 30. Производные некоторых элементарных функций</b>	<b>172</b>
1. Производная показательной функции . . . . .	—
2. Производная логарифмической функции . . . . .	173
3. Производная степенной функции . . . . .	174
4. Производные тригонометрических функций . . . . .	—
5. Производные обратных тригонометрических функций . . . . .	176
Упражнения . . . . .	178
<b>§ 31. Производные высших порядков</b>	<b>179</b>
1. Вторая производная . . . . .	—
2. Физический смысл второй производной . . . . .	180
Упражнения . . . . .	—
<b>§ 32. Правило Лопиталю</b>	<b>181</b>
1. Неопределенности вида $0/0$ и $\infty/\infty$ . . . . .	—
2. Неопределенности вида $0 \cdot \infty$ , $\infty - \infty$ , $1^\infty$ , $0^0$ , $\infty^0$ . . . . .	183
Упражнения . . . . .	185
<b>§ 33. Приложение производной к исследованию функций</b>	<b>185</b>
1. Интервалы монотонности . . . . .	—
2. Экстремумы функции . . . . .	188
Упражнения . . . . .	190
<b>§ 34. Построение графиков функций</b>	<b>191</b>
1. Выпуклость графика функции . . . . .	—
2. Асимптоты графика функции . . . . .	192
3. Построение графика функции . . . . .	194
Упражнения . . . . .	195
<b>§ 35. Решение задач на наибольшее и наименьшее значения функций</b>	<b>196</b>
1. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке . . . . .	—
2. Нахождение наибольшего и наименьшего значений в геометрических и физических задачах . . . . .	197
Упражнения . . . . .	200
<b>§ 36. Дифференциал функции</b>	<b>201</b>
1. Определение дифференциала функции . . . . .	—
2. Геометрический смысл дифференциала . . . . .	202
3. Приложение дифференциала к приближенным вычислениям . . . . .	203
Упражнения . . . . .	204
<b>§ 37. Формула Тейлора</b>	<b>204</b>
1. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа . . . . .	—
2. Формулы Тейлора основных элементарных функций . . . . .	206
3. Вычисление элементарных функций на ЭВМ . . . . .	208
Упражнения . . . . .	210
<b>§ 38. Приближенное вычисление корней уравнений</b>	<b>211</b>
1. Метод «вилки» . . . . .	—
2. Программа на языке Бейсик . . . . .	213
Упражнения . . . . .	214

Глава VII  
Неопределенный интеграл

<b>§ 39. Неопределенный интеграл и его свойства</b>	<b>214</b>
1. Первообразная и неопределенный интеграл	—
2. Таблица простейших интегралов	216
3. Непосредственное интегрирование	—
Упражнения	217
<b>§ 40. Методы интегрирования</b>	<b>218</b>
1. Метод замены переменной	—
2. Метод интегрирования по частям	220
Упражнения	222
<b>§ 41. Некоторые типы интегралов</b>	<b>222</b>
1. Интегралы от рациональных функций	—
2. Интегралы от иррациональных функций	228
3. Интегралы от некоторых трансцендентных функций	230
4. «Неберущиеся» интегралы	234
Упражнения	—

Глава VIII  
Определенный интеграл

<b>§ 42. Определенный интеграл и его свойства</b>	<b>232</b>
1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла	—
2. Понятие определенного интеграла. Условия интегрируемости функций на отрезке	237
3. Основные свойства определенных интегралов	239
Упражнения	241
<b>§ 43. Основные теоремы об определенном интеграле</b>	<b>241</b>
1. Теорема о среднем	—
2. Определенный интеграл с переменным верхним пределом	242
3. Формула Ньютона — Лейбница	243
Упражнения	244
<b>§ 44. Методы вычисления определенных интегралов</b>	<b>244</b>
1. Метод замены переменной интегрирования (метод подстановки)	—
2. Метод интегрирования по частям	247
Упражнения	248
<b>§ 45. Приближенное вычисление определенного интеграла</b>	<b>249</b>
1. Формула прямоугольников	—
2. Формула трапеций	252
3. Формула парабол (формула Симпсона)	253
4. Погрешность формул приближенного вычисления определенного интеграла	255
Упражнения	256
<b>§ 46. Геометрические приложения определенного интеграла</b>	<b>257</b>
1. Вычисление площадей плоских фигур	—
2. Вычисление длины дуги плоской кривой	262
3. Вычисление объемов тел вращения	263
4. Вычисление площади поверхности тела вращения	264
Упражнения	265
<b>§ 47. Определенный интеграл в задачах физики</b>	<b>266</b>
1. Работа переменной силы	—
2. Задача о вычислении перемещения и пути	267



3. Моменты инерции материальных линий и пластинок . . . . .	270
4. Координаты центра масс . . . . .	273
Упражнения . . . . .	276

**Глава IX**  
**Ряды**

<b>§ 48. Числовые ряды . . . . .</b>	<b>277</b>
1. Числовой ряд и его сумма . . . . .	—
2. Основные теоремы о сходимости числовых рядов . . . . .	279
3. Ряды с неотрицательными членами. Признак сравнения . . . . .	281
4. Признаки Даламбера и Коши . . . . .	283
5. Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Признак Лейбница . . . . .	286
Упражнения . . . . .	289
<b>§ 49. Степенные ряды . . . . .</b>	<b>290</b>
1. Функциональные ряды. Область сходимости . . . . .	—
2. Понятие степенного ряда. Радиус сходимости. Теорема Абеля . . . . .	—
3. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов . . . . .	294
4. Ряды Тейлора элементарных функций . . . . .	296
5. Вычисление «неберущихся» интегралов с помощью степенных рядов . . . . .	299
6. Степенные ряды с комплексными членами. Формула Эйлера . . . . .	302
Упражнения . . . . .	304
<b>§ 50. Ряды Фурье . . . . .</b>	<b>305</b>
1. Ряды Фурье для периодических функций с периодом $T = 2\pi$ . . . . .	—
2. Ряды Фурье для четных и нечетных функций . . . . .	308
3. Сходимость ряда Фурье . . . . .	311
4. Ряды Фурье для периодических функций с периодом $T = 2l$ . . . . .	314
5. Разложение в ряд Фурье непериодических функций . . . . .	316
6. Комплексная форма рядов Фурье . . . . .	318
Упражнения . . . . .	320

**Глава X**  
**Дифференциальное исчисление функций**  
**нескольких переменных**

<b>§ 51. Функции нескольких переменных . . . . .</b>	<b>322</b>
1. Задачи, приводящие к понятию функции нескольких переменных . . . . .	—
2. Определение функции нескольких переменных . . . . .	—
3. Предел и непрерывность функции двух переменных . . . . .	323
4. Понятие об $n$ -мерном евклидовом пространстве. Ограниченные и замкнутые множества. Понятие области и границы области . . . . .	325
Упражнения . . . . .	326
<b>§ 52. Дифференциальное исчисление функций двух переменных . . . . .</b>	<b>326</b>
1. Частные производные . . . . .	—
2. Геометрический смысл частных производных . . . . .	327
3. Дифференцируемость и полный дифференциал . . . . .	328
4. Достаточное условие дифференцируемости функции двух переменных . . . . .	330
5. Дифференцирование сложной функции . . . . .	331
Упражнения . . . . .	333
<b>§ 53. Локальный экстремум функции двух переменных. Формула Тейлора . . . . .</b>	<b>333</b>
1. Определение экстремума функции двух переменных . . . . .	—
2. Необходимое условие экстремума . . . . .	—
3. Формула Тейлора для функции двух независимых переменных . . . . .	334
4. Достаточное условие экстремума функции двух переменных . . . . .	335
Упражнения . . . . .	337



§ 54. Уравнение касательной к кривой в пространстве. Уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности . . . . .	337
1. Уравнение касательной к кривой в пространстве . . . . .	—
2. Уравнение касательной и нормали к поверхности . . . . .	339
Упражнения . . . . .	340

**Глава XI**  
**Дифференциальные уравнения**

§ 55. Понятие дифференциального уравнения и его свойства . . . . .	341
1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям . . . . .	—
2. Общее решение дифференциального уравнения . . . . .	342
3. Начальные условия и задача Коши . . . . .	344
Упражнения . . . . .	—
§ 56. Методы решения некоторых дифференциальных уравнений первого порядка . . . . .	345
1. Уравнение с разделяющимися переменными . . . . .	—
2. Однородное уравнение . . . . .	348
3. Линейное уравнение . . . . .	350
Упражнения . . . . .	352
§ 57. Методы решения линейных дифференциальных уравнений второго порядка . . . . .	353
1. Задача Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка . . . . .	—
2. Общее решение однородного уравнения . . . . .	358
3. Действительные и комплексные корни характеристического уравнения . . . . .	359
4. Кратный корень характеристического уравнения . . . . .	361
5. Частное решение неоднородного уравнения в случае квазимногочленов . . . . .	362
Упражнения . . . . .	365
§ 58. Дифференциальное уравнение колебаний . . . . .	366
1. Задачи, приводящие к дифференциальному уравнению колебаний . . . . .	—
2. Решение задачи Коши для уравнения колебаний . . . . .	367
3. Гармонические, затухающие аperiodические свободные колебания . . . . .	369
4. Вынужденные колебания. Амплитудно-частотная характеристика и резонанс . . . . .	371
Упражнения . . . . .	—

**Глава XII**  
**Элементы интегрального исчисления**  
**для функций нескольких переменных**

§ 59. Двойной интеграл . . . . .	372
1. Определение двойного интеграла (случай прямоугольника) . . . . .	—
2. Двойной интеграл (случай произвольной области) . . . . .	375
3. Замена переменных в двойном интеграле . . . . .	377
Упражнения . . . . .	379
§ 60. Приложение двойных интегралов к задачам физики и геометрии . . . . .	381
1. Масса пластинки . . . . .	—
2. Статические моменты и центр тяжести пластинки . . . . .	382
3. Моменты инерции пластинки . . . . .	384
4. Объем тела . . . . .	385
Упражнения . . . . .	387
§ 61. Тройной интеграл . . . . .	388
1. Определение тройного интеграла . . . . .	—

2. Приложение тройного интеграла в физике и геометрии . . . . .	390
Упражнения . . . . .	394
<b>§ 62. Основные понятия векторного анализа . . . . .</b>	<b>395</b>
1. Скалярные и векторные поля . . . . .	—
2. Векторы, зависящие от скалярного аргумента . . . . .	396
3. Понятие производной векторной функции скалярного аргумента . . . . .	—
4. Производная по направлению, градиент, потенциал векторного поля . . . . .	398
Упражнения . . . . .	401
<b>§ 63. Криволинейные интегралы . . . . .</b>	<b>401</b>
1. Криволинейный интеграл первого рода . . . . .	—
2. Криволинейные интегралы второго рода . . . . .	403
3. Формула Римана-Грина . . . . .	406
Упражнения . . . . .	407
<b>§ 64. Поверхностные интегралы первого рода . . . . .</b>	<b>407</b>
1. Поверхность в пространстве . . . . .	—
2. Площадь поверхности . . . . .	408
3. Определение поверхностного интеграла первого рода . . . . .	412
Упражнения . . . . .	413
<b>§ 65. Поверхностные интегралы второго рода . . . . .</b>	<b>413</b>
1. Поток векторного поля через поверхность . . . . .	—
2. Дивергенция. Формула Гаусса-Остроградского . . . . .	414
3. Понятие ротора векторного поля. Формула Стокса . . . . .	416
Упражнения . . . . .	419
<b>Предметный указатель . . . . .</b>	<b>421</b>