TORAIGHYROV UNIVERSITY

ҚАЗАҚСТАН ҒЫЛЫМЫ МЕН ТЕХНИКАСЫ
НАУКА И ТЕХНИКА КАЗАХСТАНА

ISSN 1680-9165

ҒЫЛЫМИ ЖУРНАЛ

УДК 62-631.1

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ШЕСТИЗВЕННЫХ ПЕРЕМЕЩАЮЩИХ МЕХАНИЗМОВ ПО ЗАДАННЫМ ПОЛОЖЕНИЯМ ВХОДНОГО И ВЫХОДНОГО ЗВЕНЬЕВ

М.М. Молдабеков, С.Б. Косболов, Е.Т. Бекенов

ИММаш НАН РК, Казахстан

В данной работе показано, что использование 4-звенной исходной кинематической цепи (ИКЦ) в синтезе плоских механизмов можно распростронить на задачу структурно-кинематического синтеза пространственных рычажных механизмов.

Аталған жұмыста жазық механизмдерде төрт буынды шығынды кинематикалық тізбекті пайдалануда кеңістікті тетікті механизмдерінің құрылымды-кинематикалық жүйесінің есебін таратуға болатыны көрсетілген.

The article shows that the use of 4-link initial kinematic chain (IKC) in the synthesis of flat mechanisms can be spread on to the task of structural-kinematic synthesis of spatial lever mechanisms.

В работах [1,2] было показано, что в качестве структурного модуля при структурно-кинематическом синтезе плоских рычажных механизмов можно использовать четырехзвенную исходную кинематическую цепи (ИКЦ). Такой подход к синтезу плоских механизмов позволяет свести задачу их структурно-кинематического синтеза к решению задачи синтеза ИКЦ, что очень удобно для автоматизации проектирования механизмов. В данной работе показано, что указанный подход можно распространить на задачу структурно-кинематического синтеза пространственных рычажных механизмов.

Представлено решение задачи синтеза пространственной ИКЦ типа *ВВС* (*В* – вращательная, *С* – сферическая кинематические пары) и показано ее использование в качестве структурного модуля при структурно-кинематическом синтезе пространственных рычажных механизмов по заданным положениям входного и выходного звеньев. Метод решения задачи синтеза ИКЦ типа *ВВС* основан на введении двух подвижных тел, неизменно связанных с входным и выходным звеньями.

Постановка задачи: Пусть заданы N конечноудаленных положений двух твердых тел $Q_1(X_A, Y_A, Z_A, \theta_i^1, \psi_i^1, \varphi_i^1)$, $Q_2(X_{Di}, Y_{Di}, Z_{Di}, \theta_i^2, \psi_i^2, \varphi_i^2)$ по отношению к неподвижной системе отсчета Q, где $i = \overline{1,N}$, $\theta_i^j, \psi_i^j, \varphi_i^j$ - Эйлеровы углы относительно неподвижной системы координат $OXYZ$.

Требуется его приближенно воспроизводить посредством рычажных механизмов с одной степенью подвижности. Это требование приводит к следующей задаче синтеза: определить структуру и искомые параметры механизма. Для решения поставленной задачи используем незамкнутую четырехзвенную ИКЦ типа BBC (рис. 1).

Кинематический синтез пространственных шестизвенных перемещающих механизмов по заданным положениям входного и выходного звеньев

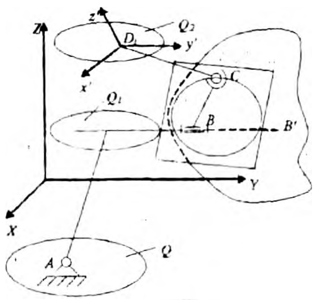

Рисунок 1

Синтез ИКЦ $ABCD$ сводится к определнию точки $C(x_C, y_C, z_C)$ тела Q_2, которая в N положениях в смысле наименьших квадратов наименее уклоняется от окружности, принадлежащей подвижной системе Q_1. Приближающую окружность определим как линию пересечения сферы с плоскостью. Тогда искомая точка C в N положениях должна приближаться как к сфере, так и к плоскости. Поэтому минимизируемую функцию представим в следующем виде:

$S = S_1 + S_2$ (1)

где

$$S_1 = \sum_{i=1}^{N}\left[(X_{Ci} - X_{Bi})^2 + (Y_{Ci} - Y_{Bi})^2 + (Z_{Ci} - Z_{Bi})^2 - R^2\right]$$

$$S_2 = \sum_{i=1}^{N}(X_i a + Y_i b + Z_i c - 1)^2, \quad i = \overline{1,N}$$

$$[X_{Bi}, Y_{Bi}, Z_{Bi}]^T = [X_A, Y_A, Z_A]^T + T_{kj}[x_B, y_B, z_B]^T$$

$$[X_{Ci}, Y_{Ci}, Z_{Ci}]^T = [X_{Di}, Y_{Di}, Z_{Di}]^T + T_{kj}[x_C, y_C, z_C]^T$$

$$[X_i, Y_i, Z_i]^T = T_{kj}^t[(X_{Ci} - X_{Bi}), (Y_{Ci} - Y_{Bi}), (Z_{Ci} - Z_{Bi})]^T$$

$$T_{kj}^{i}=\begin{vmatrix} e_{11}^{j} & e_{22}^{j} & e_{33}^{j} \\ m_{21}^{j} & m_{22}^{j} & m_{23}^{j} \\ n_{31}^{j} & n_{32}^{j} & n_{33}^{j} \end{vmatrix}, \quad (k=\overline{0,2};\ j=\overline{0,2};\ i=\overline{1,N})$$

$$T_{01}^{i}=\left[T_{10}^{i}\right]^{T};\quad T_{02}^{i}=\left[T_{20}^{i}\right]^{T};\quad T_{21}^{i}=T_{01}^{i}\times T_{20}^{i};\quad T_{12}^{i}=T_{02}^{i}\times T_{10}^{i},...$$

Необходимые условия минимума суммы (1) записываются в виде

$$\frac{\partial s}{\partial X_A}=0;\quad \frac{\partial s}{\partial Y_A}=0;\quad \frac{\partial s}{\partial Z_A}=0;\quad \frac{\partial s}{\partial R}=0; \qquad (2)$$

$$\frac{\partial s}{\partial x_B}=0;\quad \frac{\partial s}{\partial y_B}=0;\quad \frac{\partial s}{\partial z_B}=0;\quad \frac{\partial s}{\partial R}=0; \qquad (3)$$

$$\frac{\partial s}{\partial a}=0;\quad \frac{\partial s}{\partial b}=0;\quad \frac{\partial s}{\partial c}=0; \qquad (4)$$

$$\frac{\partial s}{\partial x_C}=0;\quad \frac{\partial s}{\partial y_C}=0;\quad \frac{\partial s}{\partial z_C}=0;\quad \frac{\partial s}{\partial R}=0; \qquad (5)$$

Первые четыре условия (2) приводится к следующей системе:

$$\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{N}\tilde{X}_{Ai}^{2} & \sum_{i=1}^{N}\tilde{X}_{Ai}\tilde{Y}_{Ai} & \sum_{i=1}^{N}\tilde{X}_{Ai}\tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^{N}\tilde{X}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^{N}\tilde{X}_{Ai}\tilde{Y}_{Ai} & \sum_{i=1}^{N}\tilde{Y}_{Ai} & \sum_{i=1}^{N}\tilde{Y}_{Ai}\tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^{N}\tilde{Y}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^{N}\tilde{X}_{Ai}\tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^{N}\tilde{Y}_{Ai}\tilde{Z}_{Ai} & \sum_{i=1}^{N}\tilde{Z}_{Ai}^{2} & \sum_{i=1}^{N}\tilde{Z}_{Ai} \\ \sum_{i=1}^{N}\tilde{X}_{Ai} & \sum_{i=1}^{N}\tilde{Y}_{Ai} & \sum_{i=1}^{N}\tilde{Z}_{Ai} & N \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \\ H_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{N}R_{A_i}^{2}\tilde{X}_{A_i} \\ \sum_{i=1}^{N}R_{A_i}^{2}\tilde{Y}_{A_i} \\ \sum_{i=1}^{N}R_{A_i}^{2}\tilde{Z}_{A_i} \\ \sum_{i=1}^{N}R_{A_i}^{2} \end{vmatrix} \qquad (6)$$

где $R_{Ai}^{2}=\tilde{X}_{Ai}^{2}+\tilde{Y}_{Ai}^{2}+\tilde{Z}_{Ai}^{2}$, $H_1=\frac{1}{2}(R^2-X_A^2-Y_A^2-Z_A^2)$

$$\left[\tilde{X}_{Ai},\tilde{Y}_{Ai},\tilde{Z}_{Ai},1\right]^{t}=T_{10}^{i}\left[x_B,y_B,z_B,1\right]^{t}+T_{20}^{i}\left[x_C,y_C,z_C,1\right]^{t}$$

Вторые четыре условия (3) приводится аналогично к системе:

$$\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{N}\tilde{x}_{Bi}^{2} & \sum_{i=1}^{N}\tilde{x}_{Bi}y_{Bi} & \sum_{i=1}^{N}\tilde{x}_{Bi}\tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^{N}\tilde{x}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^{N}\tilde{x}_{Bi}y_{Bi} & \sum_{i=1}^{N}\tilde{y}_{Bi}^{2} & \sum_{i=1}^{N}\tilde{y}_{Bi}\tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^{N}\tilde{y}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^{N}\tilde{x}_{Bi}\tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^{N}\tilde{y}_{Bi}\tilde{z}_{Bi} & \sum_{i=1}^{N}\tilde{z}_{Bi}^{2} & \sum_{i=1}^{N}\tilde{z}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^{N}\tilde{x}_{Bi} & \sum_{i=1}^{N}\tilde{y}_{Bi} & \sum_{i=1}^{N}\tilde{z}_{Bi} & N \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \\ H_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{N}R_{Bi}^{2}\tilde{x}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^{N}R_{Bi}^{2}\tilde{y}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^{N}R_{Bi}^{2}\tilde{z}_{Bi} \\ \sum_{i=1}^{N}R_{Bi}^{2} \end{vmatrix} \qquad (7)$$

где

$$\left[\tilde{x}_B,\tilde{y}_B,\tilde{z}_B,1\right]^{t}=T_{01}^{i}\left[\left(X_{D_i}-X_A\right)\left(Y_{D_i}-Y_A\right)\left(Z_{D_i}-Z_A\right)1\right]^{t}+T_{21}^{i}\left[x_C,y_C,z_C,1\right]^{t}$$

Следующие три условия (4) приводится с помощью выражения (1) к следующей системе

$$\begin{vmatrix} \sum X_i^2 & \sum X_iY_i & \sum X_iZ_i \\ \sum X_iY_i & \sum Y_i^2 & \sum Y_iZ_i \\ \sum X_iZ_i & \sum Y_iZ_i & \sum Z_i^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum X_i \\ \sum Y_i \\ \sum Z_i \end{vmatrix} \qquad (8)$$

При известных значениях X_A, Y_A, Z_A, x_B, y_B, z_B, a, b, c можно определить направление оси, центр и радиус окружности лежащей в Q_I. Направляющие косинусы оси Q_I окружности равны

$$(Q_{1X}, Q_{1Y}, Q_{1Z}) = \frac{(a, b, c)}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}} \quad (9)$$

Центр B окружности определяются как точка пересечения прямой с направляющим вектором (Q_{1X}, Q_{1Y}, Q_{1Z}), проходящей через центр $B\ddot{y}$ сферы с плоскостью окружности

$$x_{B'} = x_B - Q_{1X} d; \; y_{B'} = y_B - Q_{1Y} d; \; z_{B'} = z_B - Q_{1Z} d,$$

где $d = (ax_{B'} + by_{B'} + cz_{B'} - 1) \cdot \dfrac{1}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}}$

Рассмотрим последнее условие (5), которое приводит к следующей системе уравнений:

$$\begin{bmatrix} \sum(\tilde{x}_{Ci}^2 + a_{ix}^2) & \sum(\tilde{x}_{Ci}\tilde{y}_{Ci} + a_{ix}a_{iy}) & \sum(\tilde{x}_{Ci}\tilde{z}_{Ci} + a_{ix}a_{iy}) & \sum\tilde{x}_{Ci} \\ \sum(\tilde{x}_{Ci}\tilde{y}_{Ci} + a_{ix}a_{iy}) & \sum(\tilde{y}_{Ci}^2 + a_{iy}^2) & \sum(\tilde{y}_{Ci}\tilde{z}_{Ci} + a_{iy}a_{iz}) & \sum\tilde{y}_{Ci} \\ \sum(\tilde{x}_{Ci}\tilde{z}_{Ci} + a_{ix}a_{iy}) & \sum(\tilde{y}_{Ci}\tilde{z}_{Ci} + a_{iy}a_{iz}) & \sum(\tilde{z}_{Ci}^2 + a_{iz}^2) & \sum\tilde{z}_{Ci} \\ \sum\tilde{x}_{Ci} & \sum\tilde{y}_{Ci} & \sum\tilde{z}_{Ci} & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \\ H_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum(R_{Ci}^2\tilde{x}_{Ci} + f_i a_{ix}) \\ \sum(R_{Ci}^2\tilde{y}_{Ci} + f_i a_{iy}) \\ \sum(R_{Ci}^2\tilde{z}_{Ci} + f_i a_{iz}) \\ \sum\tilde{R}_{Ci}^2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

где

$$[\tilde{x}_{Ci}, \tilde{y}_{Ci}, \tilde{z}_{Ci}, 1]^T = -T_{02}^i[(X_A - X_{D_i})(Y_A - Y_{D_i})(Z_A - Z_{D_i})1]^T + T_{12}^i[x_B, y_B, z_B, 1]^T;$$

$$[a_{ix}, a_{iy}, a_{iz}]^T = T_{kj}^{-1}[a, b, c]^T; \; f_i = X_{Ci}a + Y_{Ci}b + Z_{Ci}c - 1.$$

При определении искомых параметров синтеза последовательные итерации осуществляются по следующему алгоритму:

1. Задаемся произвольно начальными точками $B^{(0)} \in Q_1$ и $C^{(0)} \in Q_2$.
2. Решаем систему уравнений (6) и определяем $X_A^{(1)}, Y_A^{(1)}, Z_A^{(1)}, R_1^{(1)}$.
3. Подставляя значения $A^{(1)} \in Q$ и $C^{(0)} \in Q_2$ в уравнение (7), определяем $x_B^{(1)}, y_B^{(1)}, z_B^{(1)}$.
4. Задаемся значениями $A^{(1)} \in Q$, $B^{(1)} \in Q_1$ и $C^{(1)} \in Q_2$ в уравнение (8), определяем коэффициенты плоскости a, b, c.
5. Задаемся значениями $X_A^{(1)}, Y_A^{(1)}, Z_A^{(1)}$, $x_B^{(1)}, y_B^{(1)}, z_B^{(1)}, a, b, c$ в уравнение (10), определяем $x_C^{(1)}, y_C^{(1)}, z_C^{(1)}$. Если $\max\left(\left|x_C^{(i+1)} - x_C^{(i)}\right|; \left|y_C^{(i+1)} - y_C^{(i)}\right|; \left|z_C^{(i+1)} - z_C^{(i)}\right|\right) \le \varepsilon$, то итерационный процесс завершается.

В результате решения задачи синтеза определяются точки $A(X_A, Y_A, Z_A)$ в неподвижной системе координат, BOQ_1, COQ_2 такие, что совмещая с ними звено BC, получим искомую ИКЦ в виде незамкнутой цепи $ABCD$ типа BBC.

Задавая в различных комбинациях часть искомых параметров синтеза, получим различные модификации ИКЦ.

1. Если заданы координаты точки $A(X_A, Y_A, Z_A)$ и Эйлеровы углы тела Q_1 и координаты точки $D_i(X_{Di}, Y_{Di}, Z_{Di})$ и Эйлеровы углы тела Q_2, то получим трехзвенную незамкнутую цепь $ABCD$ типа BC.

Необходимые условия минимума суммы S в данном случае принимает вид:
$$\frac{\partial S}{\partial j} = 0; \quad (j = x_B, y_B, z_B, R, a, b, c, x_C, y_C, z_C)$$
и для нахождения минимума суммы S можно использовать выше приведенный алгоритм, учитывая, что параметры X_A, Y_A, Z_A заданы.

2. Пусть заданы координаты $x_B=y_B=z_B=0$ точки BOQ_1, COQ_2 и Эйлеровы углы тела Q_2. Задача сводится к определению точки COQ_2, которая в N положениях в смысле наименьших квадратов наименее уклоняется от окружности, принадлежащий неподвижной системе Q. Необходимые условия минимума суммы S:
$$\frac{\partial S}{\partial j} = 0; \quad (j = x_A, y_A, z_A, R, a, b, c, x_C, y_C, z_C)$$
Для ее решения можно применить выше приведенный алгоритм, полагая $x_B=y_B=z_B=0$, тогда получим модификации ИКЦ ACD типа BC, связывающее тело Q_2 со стойкой Q.

Рассмотрим синтез перемещающих шестизвенных механизмов по заданным положениям входного и выходного звеньев. Пусть заданы законы движения входного звена $Q_1(X_A, Y_A, Z_A, \theta_i^1 = const, \psi_i^1 = 0, \varphi_i^1)$ и выходного звена $Q_2(X_{Di}, Y_{Di}, Z_{Di}, \theta_i^2, \psi_i^2, \varphi_i^2)$ (рис. 2).

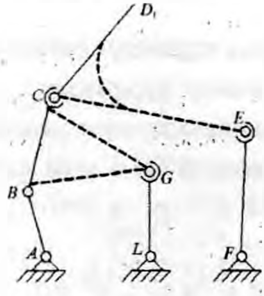

Рисунок 2

Число степеней подвижности ИКЦ $ABCD$ относительно стойки равно сумме подвижности входного и выходного звена механизма W=5. Чтобы получить механизм с одной степенью подвижности на ИКЦ $ABCD$ необходимо наложить геометрические связи с отрицательной степенью подвижности W= - 4. Для этого дважды используем модификацию ИКЦ ACD имеющая степень свободы W= - 2. В начале для синтеза данного механизма используем ИКЦ $ABCD$ составляя целевую функцию в виде:

$$S_1 = \sum_{i=1}^{N}\left[\Delta_{qi}^{(1)}(X_A, Y_A, Z_A, x_B, y_B, z_B, R, a, b, c, x_C, y_C, z_C)\right]^2$$

Синтез ИКЦ *ABCD* осуществляется по выше приведенному алгоритму. Далее на основе выражения (1) и (9) определяются координаты x_{Bi}, y_{Bi}, z_{Bi} точки *B* и направляющие косинусы звена *BC*. Синтезируем звено *LG* типа *BC* на основе модификации *ACD* (рис. 3). Целевая функция имеет вид:

$$S_2 = \sum_{i=1}^{N}\left[\Delta_{qi}^{(2)}(X_L, Y_L, Z_L, R, x_G, y_G, z_G, a, b, c)\right]^2$$

Аналогично синтезируем звено *EF*, используя ИКЦ *ACD*

$$S_3 = \sum_{i=1}^{N}\left[\Delta_{qi}^{(3)}(X_F, Y_F, Z_F, R, x_E, y_E, z_E, a, b, c)\right]^2.$$

В итоге получим шестизвенный механизм II класса.

Используя аналогично выражение (1) можно синтезировать шестизвенные механизмы III и IV класса, которые показаны на рисунках 3 и 4. Однако синтез механизма IV класса проводится на основе модификации ИКЦ *ABCD*. При определение параметров звена *LG*, необходимо использовать модификацию ИКЦ *ABCD*.

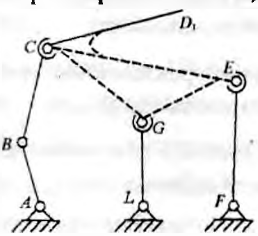

Рисунок 3

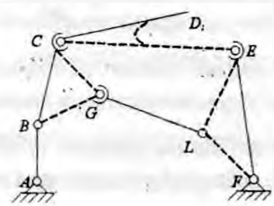

Рисунок 4

Таким образом, используя одну и ту же целевую функцию, составленную для синтеза ИКЦ и ее модификации, позволяет автоматизировать процесс синтеза пространственных рычажных механизмов по заданным положениям входного и выходного звеньев механизма.

ЛИТЕРАТУРА

1. Джолдасбеков У.А., Дракунов Ю.М., Косболов С.Б., Молдабеков М.М. Синтез исходных кинематических цепей механизмов высоких классов. Изв. АН КазССР, серия физ.-мат., 1987, № 3, с. 65-70.

2. Косболов С.Б., Молдабеков М.М. Синтез исходных кинематических цепей со сферическими парами для пространственных механизмов. Вестник КазНТУ, 1(29)/2002, стр. 39-44.