

Л 2013

38509

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Г.И.Архишов В.А.Садовничий
В.Н.Чубариков

ЛЕКЦИИ
ПО
МАТЕМАТИЧЕСКОМУ
АНАЛИЗУ

ВЫСШАЯ ШКОЛА

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
ЧАСТЬ I. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ	
Глава I. ВВЕДЕНИЕ	7
<i>Лекция 1</i>	
§ 1. Множества. Операции над множествами. Декартово произведение. Отображения. Функции	7
<i>Лекция 2</i>	
§ 2. Эквивалентные множества. Счетные и несчетные множества. Мощность континуума	14
<i>Лекция 3</i>	
§ 3. Вещественные числа	19
<i>Лекция 4</i>	
§ 4. Полнота множества вещественных чисел	23
§ 5. Леммы об отделимости множеств, о системе вло- женных отрезков и последовательности стягиваю- щихся отрезков	27
Глава II. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ	29
<i>Лекция 5</i>	
§ 1. Метод математической индукции. Бином Ньютона и неравенство Бернулли	29
§ 2. Числовые последовательности. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности и их свой- ства	33
<i>Лекция 6</i>	
§ 3. Предел последовательности	38
§ 4. Предельный переход в неравенствах	41
<i>Лекция 7</i>	
§ 5. Монотонные последовательности. Теорема Вейер- штрасса. Число "e" и постоянная Эйлера	45
<i>Лекция 8</i>	
§ 6. Теорема Больцано – Вейерштрасса о существовании частичного предела у ограниченной последователь- ности	52
§ 7. Критерий Коши для сходимости последовательности	53
Глава III. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ	55
<i>Лекция 9</i>	
§ 1. Понятие предела числовой функции	55
§ 2. База множеств. Предел функции по базе	57

<i>Лекция 10</i>	
§ 3. Свойство монотонности предела функции.....	63
§ 4. Критерий Коши существования предела функции по базе.....	64
<i>Лекция 11</i>	
§ 5. Эквивалентность определений сходимости по Коши и по Гейне.....	67
§ 6. Теоремы о пределе сложной функции.....	68
§ 7. Порядок бесконечно малой функции.....	72
Глава IV. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ....	74
<i>Лекция 12</i>	
§ 1. Свойства функций, непрерывных в точке.....	74
§ 2. Непрерывность элементарных функций.....	76
<i>Лекция 13</i>	
§ 3. Замечательные пределы.....	79
§ 4. Непрерывность функции на множестве.....	82
<i>Лекция 14</i>	
§ 5. Общие свойства функций, непрерывных на отрезке	90
<i>Лекция 15</i>	
§ 6. Понятие равномерной непрерывности.....	93
§ 7. Свойства замкнутых и открытых множеств. Компакт. Функции, непрерывные на компакте.....	94
Глава V. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.....	98
<i>Лекция 16</i>	
§ 1. Приращение функции. Дифференциал и производная функции.....	98
<i>Лекция 17</i>	
§ 2. Дифференцирование сложной функции.....	103
§ 3. Правила дифференцирования.....	107
<i>Лекция 18</i>	
§ 4. Производные и дифференциалы высших порядков..	109
§ 5. Возрастание и убывание функции в точке.....	115
<i>Лекция 19</i>	
§ 6. Теоремы Ролля, Коши и Лагранжа.....	117
<i>Лекция 20</i>	
§ 7. Следствия из теоремы Лагранжа.....	122
§ 8. Некоторые неравенства.....	123
§ 9. Производная функции, заданной параметрически...	125
<i>Лекция 21</i>	
§ 10. Раскрытие неопределенностей.....	126
<i>Лекция 22</i>	
§ 11. Локальная формула Тейлора.....	132

§ 12. Формула Тейлора с остаточным членом в общей форме	137
<i>Лекция 23</i>	
§ 13. Применение формулы Тейлора к некоторым функциям	141
<i>Лекция 24</i>	
§ 14. Исследование функций с помощью производных. Экстремальные точки. Выпуклость	144
<i>Лекция 25</i>	
§ 15. Точки перегиба	151
<i>Лекция 26</i>	
§ 16. Интерполирование	157
<i>Лекция 27</i>	
§ 17. Метод хорд и метод касательных (метод Ньютона). Быстрые вычисления	160
Глава VI. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ	166
<i>Лекция 28</i>	
§ 1. Точная первообразная. Интегрируемые функции ...	166
<i>Лекция 29</i>	
§ 2. Свойства неопределенного интеграла	169
<i>Лекция 30</i>	
Дополнение. Обобщение понятия предела по Гейне на функции, сходящиеся по базе множеств	174
ЧАСТЬ II. ИНТЕГРАЛ РИМАНА. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ	
Глава VII. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ	183
<i>Лекция 1</i>	
§ 1. Введение	183
§ 2. Определение интеграла Римана	184
<i>Лекция 2</i>	
§ 3. Критерий интегрируемости функции по Риману	190
<i>Лекция 3</i>	
§ 4. Эквивалентность трех условий интегрируемости функции по Риману	195
§ 5. Специальный критерий интегрируемости функции по Риману	196
§ 6. Метод интегральных сумм	200
<i>Лекция 4</i>	
§ 7. Свойства интеграла Римана как предела по базе .	204
§ 8. Классы функций, интегрируемых по Риману	209
<i>Лекция 5</i>	
§ 9. Свойства определенного интеграла	212
§ 10. Аддитивность интеграла	217

Глава VIII. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ИНТЕГ-	
ГРАЛА РИМАНА	219
<i>Лекция 6</i>	
§ 1. Интеграл как функция верхнего (нижнего) предела интегрирования. Производная интеграла	219
§ 2. Теорема Ньютона – Лейбница. Формулы суммирования Эйлера и Абеля	220
<i>Лекция 7</i>	
§ 3. Формулы замены переменной и интегрирования по частям в определенном интеграле	225
§ 4. Первая и вторая теоремы о среднем значении	226
<i>Лекция 8</i>	
§ 5. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме	233
§ 6. Неравенства, содержащие интегралы	239
<i>Лекция 9</i>	
§ 7. Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману	241
§ 8. Доказательство критерия Лебега	242
Глава IX. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ	246
<i>Лекция 10</i>	
§ 1. Определение несобственных интегралов первого и второго рода	246
§ 2. Критерий Коши и достаточные условия сходимости несобственных интегралов	248
§ 3. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов. Признаки Абеля и Дирихле	249
<i>Лекция 11</i>	
§ 4. Несобственные интегралы второго рода	253
§ 5. Формулы замены переменной и интегрирования по частям в несобственном интеграле	255
Глава X. ДЛИНА ДУГИ КРИВОЙ	257
<i>Лекция 12</i>	
§ 1. Кривые в многомерном пространстве	257
§ 2. Теорема о длине дуги кривой	259
Глава XI. МЕРА ЖОРДАНА	262
<i>Лекция 13</i>	
§ 1. Площадь плоской фигуры и объем пространственного тела. Определение меры Жордана	262
§ 2. Критерий измеримости множества по Жордану	264
<i>Лекция 14</i>	
§ 3. Свойства меры Жордана	267
§ 4. Измеримость спрямляемой кривой	269

§ 5. Связь между интегрируемостью функции по Риману и измеримостью по Жордану ее криволинейной трапеции	271
Глава XII. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МЕРЫ И ИНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА. ИНТЕГРАЛ СТИЛЬТЬЕСА	275
<i>Лекция 15</i>	
§ 1. Определение и свойства меры Лебега	275
<i>Лекция 16</i>	
§ 2. Интеграл Лебега	282
<i>Лекция 17</i>	
§ 3. Интеграл Стильтьеса	288
Глава XIII. НЕКОТОРЫЕ ПОНЯТИЯ ОБЩЕЙ ТОПОЛОГИИ. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА	296
<i>Лекция 18</i>	
§ 1. Определения	296
<i>Лекция 19</i>	
§ 2. Хаусдорфовость метрического пространства в естественной топологии	302
§ 3. Внутренние, внешние и граничные точки множества в метрическом пространстве	303
§ 4. Лемма о последовательности стягивающихся шаров. Принцип сжимающих отображений	306
<i>Лекция 20</i>	
§ 5. Непрерывные отображения метрических пространств	308
§ 6. Понятие компакта. Компакты в \mathbb{R}^n и полнота пространства \mathbb{R}^n . Свойства непрерывных функций на компакте	309
§ 7. Связные множества и непрерывность	312
Глава XIV. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ	314
<i>Лекция 21</i>	
§ 1. Непрерывные функции в \mathbb{R}^n	314
§ 2. Дифференцируемые функции в \mathbb{R}^n	317
<i>Лекция 22</i>	
§ 3. Дифференцирование сложной функции	320
§ 4. Производная по направлению. Градиент	321
§ 5. Геометрический смысл дифференциала	323
<i>Лекция 23</i>	
§ 6. Частные производные высших порядков	324
§ 7. Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора	326

Лекция 24	
§ 8. Приложение формулы Тейлора. Локальный экстремум функции многих переменных.....	330
§ 9. Неявные функции.....	332
Лекция 25	
§ 10. Система неявных функций.....	337
§ 11. Условный экстремум функции многих переменных.	341
§ 12. Дифференцируемые отображения. Матрица Якоби.	344
ЧАСТЬ III. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ	
Глава XV. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ	347
Лекция 1	
§ 1. Основные свойства сходящихся рядов. Критерий Коши	347
Лекция 2	
§ 2. Ряды с неотрицательными членами	355
Лекция 3	
§ 3. Основные признаки сходимости для рядов с неотрицательными членами.....	360
Лекция 4	
§ 4. Абсолютная и условная сходимость рядов. Ряды Лейбница	368
§ 5. Признаки Абеля и Дирихле	370
Лекция 5	
§ 6. Перестановки членов ряда	373
Лекция 6	
§ 7. Арифметические операции над сходящимися рядами	376
Лекция 7	
§ 8. Двойные и повторные ряды.....	381
Глава XVI. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ	388
Лекция 8	
§ 1. Сходимость функционального ряда.....	388
§ 2. Равномерная сходимость	391
Лекция 9	
§ 3. Критерий равномерной сходимости функциональной последовательности	394
§ 4. Признаки равномерной сходимости	396
Лекция 10	
§ 5. Теорема Дини	401
§ 6. Почленное дифференцирование и интегрирование ряда.....	402
Лекция 11	
§ 7. Двойные и повторные пределы по базе множеств .	407

Лекция 12	
§ 8. Степенные ряды	411
Лекция 13	
§ 9. Бесконечные произведения	416
Лекция 14	
§ 10. Бесконечные определители	422
§ 11. Равностепенная непрерывность и теорема Арцела ..	425
Глава XVII. ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРА-	
МЕТРА	428
Лекция 15	
§ 1. Собственные параметрические интегралы и их не-	
прерывность	428
§ 2. Дифференцирование и интегрирование собственных	
параметрических интегралов	431
Лекция 16	
§ 3. Теорема Лагранжа	436
Лекция 17	
§ 4. Равномерная сходимость по Гейне	439
§ 5. Эквивалентность двух определений равномерной	
сходимости	440
Лекция 18	
§ 6. Равномерная сходимость несобственных параметри-	
ческих интегралов	444
Лекция 19	
§ 7. Непрерывность, дифференцируемость и интегриру-	
емость по параметру несобственных интегралов	449
Лекция 20	
§ 8. Несобственные интегралы второго рода	456
§ 9. Применение теории параметрических интегралов ...	458
Лекция 21	
§ 10. Интегралы Эйлера первого и второго рода	461
Лекция 22	
§ 11. Формула Стирлинга	467
Глава XVIII. РЯДЫ И ИНТЕГРАЛЫ ФУРЬЕ	471
Лекция 23	
§ 1. Представление дробной доли вещественного числа	
тригонометрическим рядом. Формула суммирования	
Пуассона. Суммы Гаусса	471
Лекция 24	
§ 2. Неравенство Бесселя. Замкнутость и полнота ор-	
тонормированной системы функций	482
Лекция 25	
§ 3. Замкнутость тригонометрической системы функций	488

§ 4. Простейшие свойства тригонометрических рядов Фурье	493
<i>Лекция 26</i>	
§ 5. Интегральное представление для частичной суммы ряда Фурье. Принцип локализации Римана	497
§ 6. Признаки поточечной сходимости рядов Фурье	501
<i>Лекция 27</i>	
§ 7. Поведение коэффициентов Фурье	506
§ 8. Разложение котангенса на простейшие дроби и представление синуса в виде бесконечного произведения	509
§ 9. Задача Кеплера и ряды Бесселя	511
<i>Лекция 28</i>	
§ 10. Ядро Фейера и аппроксимационная теорема Вейерштрасса	514
§ 11. Интеграл Дирихле и разложение на простейшие дроби	517
<i>Лекция 29</i>	
§ 12. Преобразование Фурье и интеграл Фурье	522
<i>Лекция 30</i>	
§ 13. Метод Лапласа и метод стационарной фазы	534
ЧАСТЬ IV. КРАТНЫЙ ИНТЕГРАЛ РИМАНА. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ	
Глава XIX. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ	544
<i>Лекция 1</i>	
§ 1. Двойной интеграл Римана как предел по базе	544
§ 2. Суммы Дарбу и их свойства	547
<i>Лекция 2</i>	
§ 3. Критерий Римана интегрируемости функции на прямоугольнике	550
§ 4. Специальный критерий интегрируемости функции на прямоугольнике	553
<i>Лекция 3</i>	
§ 5. Измеримость по Жордану цилиндрической криволинейной фигуры	556
§ 6. Понятие двойного интеграла Римана по ограниченной области, измеримой по Жордану	558
<i>Лекция 4</i>	
§ 7. Основные свойства двойного интеграла	562
§ 8. Переход от двойного интеграла к повторному	564
§ 9. Интегрируемость непрерывной функции на измеримом множестве	566
<i>Лекция 5</i>	
§ 10. Многократные интегралы	568

§ 11. Свойства гладкого отображения на выпуклом множестве	572
<i>Лекция 6</i>	
§ 12. Объем области в криволинейных координатах. Теорема о замене переменных в кратном интеграле	575
<i>Лекция 7</i>	
§ 13. Критерий Лебега	584
<i>Лекция 8</i>	
§ 14. Несобственные кратные интегралы	588
<i>Лекция 9</i>	
§ 15. Площадь поверхности	595
§ 16. Площадь m -мерной поверхности в евклидовом пространстве n измерений	600
Глава XX. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ	603
<i>Лекция 10</i>	
§ 1. Криволинейные интегралы	603
§ 2. Свойства криволинейных интегралов	604
<i>Лекция 11</i>	
§ 3. Криволинейные интегралы второго рода по замкнутому контуру. Формула Грина	609
<i>Лекция 12</i>	
§ 4. Поверхностные интегралы	614
§ 5. Согласование ориентации поверхности и ее границы	618
<i>Лекция 13</i>	
§ 6. Формула Стокса	622
§ 7. Формула Гаусса – Остроградского	624
<i>Лекция 14</i>	
§ 8. Криволинейные интегралы, зависящие только от пределов интегрирования	630
§ 9. Элементы векторного анализа	633
<i>Лекция 15</i>	
§ 10. Потенциальное и соленоидальное векторные поля	639
Глава XXI. ОБЩАЯ ФОРМУЛА СТОКСА	645
<i>Лекция 16</i>	
§ 1. Понятие ориентированной многомерной поверхности	645
§ 2. Согласование ориентаций поверхности и ее границы в общем случае	647
§ 3. Дифференциальные формы	649
§ 4. Замена переменных в дифференциальной форме ...	649
<i>Лекция 17</i>	
§ 5. Интеграл от дифференциальной формы	651
§ 6. Операция внешнего дифференцирования	654
§ 7. Доказательство общей формулы Стокса	656

Лекция 18

Дополнение. Равномерное распределение значений числовых последовательностей на отрезке	660
§ 1. Понятие равномерного распределения. Лемма об оценке коэффициентов Фурье.....	660
§ 2. Критерий Г.Вейля	664
Примерные вопросы и задачи к коллоквиумам и экзаменам	674
Литература	684