МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН
НЕКОММЕРЧЕСКОЕ АКЦИОНЕРНОЕ ОБЩЕСТВО
«АЛМАТИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ЭНЕРГЕТИКИ И СВЯЗИ ИМЕНИ ГУМАРБЕКА ДАУКЕЕВА»

ISSN 2790-0886

В Е С Т Н И К

АЛМАТИНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ЭНЕРГЕТИКИ И СВЯЗИ

Учрежден в июне 2008 года

Тематическая направленность: энергетика и энергетическое машиностроение, информационные, телекоммуникационные и космические технологии

3 (62) **2023**

Импакт-фактор - 0.095

Научно-технический журнал
Выходит 4 раза в год

Алматы

ВЕСТНИК АЛМАТИНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ЭНЕРГЕТИКИ И СВЯЗИ

СВИДЕТЕЛЬСТВО
о постановке на переучет периодического печатного издания,
информационного агентства и сетевого издания
№ KZ14VPY00024997
выдано
Министерством информации и общественного развития
Республики Казахстан

Подписной индекс – 74108

ИНФОРМАЦИОННЫЕ, ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫЕ И КОСМИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ

МРНТИ 89.23.31 https://doi.org/10.51775/2790-0886_2023_62_3_144

ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНОЙ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ СПУТНИКА НА УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ЕГО ОРИЕНТАЦИЕЙ

М.М. Молдабеков[1], А.С. Сухенко[1], Е.Е. Оразалы[2], А.Е. Аден[2] *

[1]Институт космической техники и технологий, Алматы, Казахстан
НАО «Алматинский университет энергетики и связи имени Гумарбека Даукеева», Алматы, Казахстан

e-mail: m.moldabekov@mail.ru, a.sukhenko@istt.kz, y.orazaly@aues.kz, a.aden@aues.kz

Аннотация. *В статье изложены результаты исследования влияния начальной угловой скорости вращения спутника на устойчивость системы управления ориентацией спутника (СУОС) с маховиками, кинематика которой описывается уравнениями в кватернионах. Для решения задачи используется полученное авторами представление нелинейных уравнений динамики СУОС в виде линейной системы дифференциальных уравнений с переменными во времени параметрами. Получены достаточные условия асимптотической устойчивости СУОС, которые выражены непосредственно через коэффициенты характеристического уравнения «предельной» линейной системы дифференциальных уравнений с постоянными параметрами и не требуют вычисления корней этого уравнения. Доказано, что если параметры закона управления выбираются из условия максимальной степени устойчивости усеченной «предельной» линейной системы, то СУОС глобально асимптотически устойчива при любых начальных условиях по угловым скоростям вращения спутника.*

Ключевые слова: *спутник, система управления ориентацией, асимптотическая устойчивость, начальная угловая скорость.*

Введение

При разработке закона автоматического управления ориентацией спутников используется, как правило, PD – регулятор [1-9]. При этом динамика СУОС описывается нелинейными дифференциальными уравнениями, решения которых в общем случае могут быть построены только численными методами, поэтому не представляется возможным исследовать аналитическими методами влияние начальной угловой скорости вращения спутника на устойчивость движения и качество переходных процессов в СУОС.

В инженерной практике для анализа устойчивости движения и синтеза параметров СУОС используются их приближенные линеаризованные уравнения динамики [4,10]. Основным способом линеаризации нелинейных уравнений динамики спутника, которыми пользуются авторы, является разложение функций в правой и левой частях уравнений движения в ряд Тейлора с отбрасыванием нелинейных членов высоких порядков.

Основной метод линеаризации нелинейных уравнений движения спутника, используемый авторами, заключается в разложении функций в ряд Тейлора как в правой, так и в левой частях уравнений движения, с пренебрежением нелинейными членами высоких порядков ([13], [1-5]). Однако следует отметить, что использование линеаризованных уравнений имеет свой очевидный недостаток, так как такие уравнения приближенно описывают динамику ориентации спутника. В большом количестве работ ([11-13], [2], [14-16], [1-5]) и других исследованиях посвящено синтезу параметров системы управления ориентацией спутника с использованием линеаризованных уравнений динамики для обеспечения требуемого качества переходных процессов.

В работе [5] исследуются нелинейные уравнения динамики СУОС с маховиками и на основе теоремы об изменении кинетического момента механической системы показана возможность представления исходных нелинейных уравнений динамики СУОС в линейной форме. Использование линейной формы уравнения динамики СУОС позволяет использовать имеющийся богатый арсенал методов анализа устойчивости и синтеза параметров СУОС, разработанных для линейных систем автоматического управления.

В данной статье рассматривается СУОС с маховиками, кинематика которой описывается уравнениями в кватернионах. На основе использования линейной формы уравнений динамики СУОС, предложенной в работе авторов [5], исследуется область глобальной асимптотической устойчивости СУОС в пространстве параметров закона управления в зависимости от начальной угловой скорости вращения спутника. Показано, что в пространстве параметров закона управления существует непустая область, в которой СУОС глобально асимптотически устойчива при любых начальных угловых скоростях вращения спутника.

Математическая модель СУОС

Для описания ориентации спутника введем следующие системы координат и их обозначения (Рисунок 1): $OXYZ$ – неподвижная инерциальная система координат (ИСК), начало которой находится в центре масс Земли (точка О), ось OX лежит в экваториальной плоскости и направлена в точку весеннего равноденствия, ось OZ совпадает с осью вращения Земли и направлена на северный полюс Земли, ось OY дополняет систему до правой; Cxyz – подвижная связанная система координат (ССК), начало которой находится в центре масс спутника (точка С), оси данной системы координат совпадают с главными центральными осями инерции спутника.

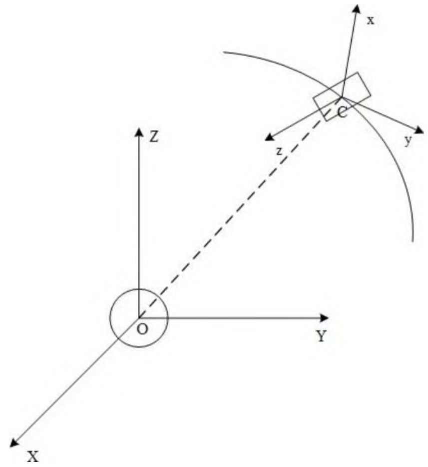


Рисунок 1 – Системы координат

На основе изложенного в работе авторов [5,9] метода преобразования исходную систему нелинейных уравнений вращательного движения СУОС можно представить в виде следующей линейной системы дифференциальных уравнений с переменными параметрами:

$$\dot{X} = [A + C + B(t)]X, \qquad (1)$$

где $X = (x_1, \dots, x_6)^T \equiv (\lambda_1, \omega_1, \lambda_2, \omega_2, \lambda_3, \omega_3)^T$, $[A + C + B(t)]$ – сумма (6х6) матриц, элементы которых имеют как постоянные, так и переменные во времени t слагаемые:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha_1}{J_1} & -\frac{h_1}{J_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\alpha_2}{J_2} & -\frac{h_2}{J_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha_3}{J_3} & -\frac{h_3}{J_3} \end{bmatrix}, \qquad (2)$$

$$C=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&-\frac{C_3}{J_1}&0&\frac{C_2}{J_1}\\0&0&0&0&0&0\\0&\frac{C_3}{J_2}&0&0&0&-\frac{C_1}{J_2}\\0&0&0&0&0&0\\0&-\frac{C_2}{J_3}&0&\frac{C_1}{J_3}&0&0\end{bmatrix}\quad B(t)=\begin{bmatrix}0&-\frac{\hat{\lambda}_0(t)}{2}&0&-\frac{\lambda_3(t)}{2}&0&\frac{\lambda_2(t)}{2}\\0&0&0&-\frac{B_3(t)}{J_1}&0&\frac{B_2(t)}{J_1}\\0&\frac{\lambda_3(t)}{2}&0&-\frac{\hat{\lambda}_0(t)}{2}&0&-\frac{\lambda_1(t)}{2}\\0&\frac{B_3(t)}{J_2}&0&0&0&-\frac{B_1(t)}{J_2}\\0&-\frac{\lambda_2(t)}{2}&0&\frac{\lambda_1(t)}{2}&0&-\frac{\hat{\lambda}_0(t)}{2}\\0&-\frac{B_2(t)}{J_3}&0&\frac{B_1(t)}{J_3}&0&0\end{bmatrix}, \quad (3)$$

$\lambda_i=\lambda_i(t),(i=\overline{0,3})$ – параметры Родрига-Гамильтона кватерниона $\Lambda(t)$ (Branets V.N.); $\hat{\lambda}_0(t)=1-\lambda_0(t)$; J_1,J_2,J_3- главные центральные моменты инерции спутника; $\vec{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)^T$ - вектор абсолютной угловой скорости спутника в проекциях на оси связанной системы координат (ССК); $J_{м1},J_{м2},J_{м3}$- моменты инерции маховиков, установленных вдоль осей ССК, соответственно; $\vec{\omega}_м=(\omega_{м1},\omega_{м2},\omega_{м3})^T$ – вектор угловых скоростей маховиков; $h_i,\alpha_i,(i=\overline{1,3})$ – неизвестные произвольные параметры закона управления, которые должны быть определены из условий устойчивости движения и обеспечения требуемых динамических характеристик СУОС; $C_i\left(i=\overline{1,3}\right)$ – проекции кинетического момента спутника на оси ССК, значения которых определяются из начальных условий по угловым скоростям вращения спутника и маховиков:

$$C_i=C_i(t_0)=J_i\omega_i(t_0)+J_{мi}\omega_{мi}(t_0),\left(i=\overline{1,3}\right); \quad (4)$$

$B_i(t)$ – билинейные функции от $\lambda_i=\lambda_i(t),(i=\overline{0,3})$.

О параметрах, влияющих на ее устойчивость СУОС

В работе авторов [5,9] доказано утверждение о том, что область глобальной асимптотической устойчивости линейной системы с переменными во времени параметрами (1) в пространстве параметров $h_i,\alpha_i,(i=\overline{1,3})$ закона управления можно найти по условиям асимптотической устойчивости «предельной» линейной однородной системы дифференциальных уравнений с постоянными параметрами:

$$\dot{X}=[A+C]X, \quad (5)$$

получаемой из системы (1) при

$$\lim_{t\to\infty}B_i(t)=0,\ \ (i=\overline{1,3}). \quad (6)$$

Как известно [7], устойчивость системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными параметрами (5) определяется расположением корней ее характеристического уравнения:

$$det\,[(A+C)-sE]=0. \quad (7)$$

Распределение корней характеристического уравнения (7) определяется значениями постоянных элементов матриц A и C. Как следует из выражений (2) и (3), элементы матрицы A зависят от параметров закона управления $h_i,\alpha_i,(i=\overline{1,3})$, а элементы матрицы C зависят от начальных условий для угловой скорости вращения спутника и маховиков (4), которые удовлетворяют следующим неравенствам:

$$-C_m\le C_i\le C_m\ (i=\overline{1,3}), \quad (8)$$

где $C_m=const>0$ – максимум абсолютных значений выражений (4).

Таким образом, использование системы (5) при анализе устойчивости СУОС требует, в общем случае, учета как значений параметров закона управления $h_i,\alpha_i,(i=\overline{1,3})$, так и начальных условий по угловой скорости вращения спутника и маховиков (4), через которые выражаются постоянные параметры $C_i(i=\overline{1,3})$ системы (5). При этом параметры $C_i(i=\overline{1,3})$ принимают заранее неизвестные значения из ограниченной замкнутой области (8) трехмерного пространства в зависимости от произвольных начальных условий по угловой скорости вращения спутника и маховиков.

Исключением является частный случай, когда начальные условия по угловой скорости вращения спутника и маховиков являются нулевыми и «предельная» линейная система (5) с постоянными параметрами принимает усеченный вид:

$$\dot{X} = AX, \tag{9}$$

где A – квазидиагональная матрица, описываемая выражением (2), постоянные элементы которой определяются только параметрами закона управления $h_i, \alpha_i, (i = \overline{1,3})$ и не зависят от начальных условий по угловой скорости вращения спутника и маховиков. Характеристическое уравнение усеченной «предельной» системы (9) с постоянными параметрами имеет вид:

$$det(\mathrm{A} - sE) = 0. \tag{10}$$

Далее можно ограничиться рассмотрением только ненулевых начальных условий по угловой скорости вращения спутника, так как с помощью магнитных исполнительных устройств можно обнулить угловые скорости маховиков перед началом перевода спутника из начального углового положения в конечное.

Исследование влияния начальных условий по угловой скорости вращения спутника на устойчивость СУОС

Точный ответ на вопрос о том, как влияют значения компонент начального кинетического момента C_1, C_2, C_3, определяемые ненулевыми начальными условиями по угловой скорости спутника на устойчивость системы (5), можно получить нахождением корней ее характеристического уравнения (7) для возможных значений C_1, C_2, C_3 из области (8).

Вместе с тем, в работе [8] показано, что достаточные условия устойчивости линейной системы (5) могут быть выражены непосредственно через коэффициенты ее характеристического уравнения (7), т. е. на вопрос об устойчивости линейных систем можно ответить, не вычисляя корней их характеристического уравнения. Этот способ анализа устойчивости системы (5) дает качественно новый и удобный инструмент для анализа устойчивости линейных систем, так как позволяет описать в аналитическом виде область асимптотической устойчивости системы (5) в пространстве параметров закона управления $h_i, \alpha_i, (i = \overline{1,3})$.

Выразим коэффициенты характеристических уравнений (10) и (7) через параметры закона управления $h_i, \alpha_i, (i = \overline{1,3})$. С учетом того, что матрица A системы (9) является квазидиагональной, ее характеристический полином может быть представлен в виде:

$$\det(\mathrm{A}\text{-}sE) = \prod_{i=1}^{3}\left(s^2 + \frac{h_i}{J_i}s + \frac{\alpha_i}{2J_i}\right) = \sum_{i=0}^{6} a_i s^i, \tag{11}$$

где его коэффициенты определяются как

$$a_0 = \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{8J_1J_2J_3}; \quad a_1 = \frac{\alpha_1\alpha_2 h_3}{4J_1J_2J_3} + \frac{h_1\alpha_2\alpha_3}{4J_1J_2J_3} + \frac{\alpha_1 h_2\alpha_3}{4J_1J_2J_3};$$
$$a_2 = \frac{\alpha_1\alpha_2}{4J_1J_2} + \frac{\alpha_1\alpha_3}{4J_1J_3} + \frac{\alpha_2\alpha_3}{4J_2J_3} + \frac{h_1\alpha_2 h_3}{2J_1J_2J_3} + \frac{\alpha_1 h_2 h_3}{2J_1J_2J_3} + \frac{h_1 h_2\alpha_3}{2J_1J_2J_3};$$
$$a_3 = \frac{h_1}{2J_1}\left(\frac{\alpha_2}{J_2} + \frac{\alpha_3}{J_3}\right) + \frac{h_2}{2J_2}\left(\frac{\alpha_1}{J_1} + \frac{\alpha_3}{J_3}\right) + \frac{h_3}{2J_3}\left(\frac{\alpha_1}{J_1} + \frac{\alpha_2}{J_2}\right) + \frac{h_1h_2h_3}{J_1J_2J_3};$$
$$a_4 = \frac{h_1h_2}{J_1J_2} + \frac{h_1h_3}{J_1J_3} + \frac{h_2h_3}{J_2J_3} + \frac{\alpha_1}{2J_1} + \frac{\alpha_2}{2J_2} + \frac{\alpha_3}{2J_3}; \quad a_5 = \frac{h_1}{J_1} + \frac{h_2}{J_2} + \frac{h_3}{J_3}; \quad a_6 = 1.$$

Для матрицы $A + C$ системы линейных дифференциальных уравнений (5) характеристический полином имеет вид:

$$det[(A + C) - sE] = \sum_{i=0}^{6} b_i s^i, \tag{12}$$

где его коэффициенты определяются как

$$b_0 = a_0; \quad b_1 = a_1; \quad b_2 = a_2 + \frac{1}{2J_1J_2J_3}(C_1^2\alpha_1 + C_2^2\alpha_2 + C_3^2\alpha_3);$$

$$b_3 = a_3 + \frac{1}{J_1J_2J_3}(C_1^2h_1 + C_2^2h_2 + C_3^2h_3); \quad b_4 = a_4 + \frac{C_1^2}{J_2J_3} + \frac{C_2^2}{J_1J_3} + \frac{C_3^2}{J_1J_2}; \quad b_5 = a_5; \quad b_6 = a_6.$$

Из семи коэффициентов полинома (12) четыре совпадают с коэффициентами характеристического полинома (11), это коэффициенты b_0, b_1, b_5, b_6. Три остальных коэффициента имеют дополнительные слагаемые, зависящие от значений компонент кинетического момента C_1, C_2, C_3.

В работе [8] введены безразмерные коэффициенты, определяемые через коэффициенты характеристического уравнения линейной системы n-го порядка и называемые показателями устойчивости:

$$u_i = \frac{b_{i-1}b_{i+2}}{b_ib_{i+1}}, (i = 1 \dots n-2), \qquad (13)$$

и доказана теорема об устойчивости линейных систем, согласно которой достаточными условиями устойчивости линейной системы n-го порядка вида (5) являются:

$$u_i < 0.465, \quad (i = 1 \dots n-2). \qquad (14)$$

Найдем, используя неравенства (14), достаточные условия устойчивости системы (5) на границах области (8), соответствующей максимально возможному значению начальной угловой скорости вращения спутника:

$$|C_i| = C_m (i = \overline{1,3}). \qquad (15)$$

При условиях (15) выражения для коэффициентов характеристического полинома (12) примут вид:

$$\begin{cases} b_0 = a_0; \quad b_1 = a_1; \quad b_2 = a_2 + kC_m^2; \\ b_3 = a_3 + 2kC_m^2; \quad b_4 = a_4 + kC_m^2; \quad b_5 = a_5; \quad b_6 = a_6; \\ \text{где } k = \frac{1}{J_1J_2J_3}(J_1 + J_2 + J_3). \end{cases} \qquad (16)$$

Тогда достаточные условия асимптотической устойчивости системы (5) будут иметь вид:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{b_0b_3}{b_1b_2} = \frac{a_0(a_3 + 2kC_m^2)}{a_1(a_2 + kC_m^2)} < 0{,}465; \\ u_2 = \frac{b_1b_4}{b_2b_3} = \frac{a_1(a_4 + kC_m^2)}{(a_2 + kC_m^2)(a_3 + 2kC_m^2)} < 0{,}465; \\ u_3 = \frac{b_2b_5}{b_3b_4} = \frac{(a_2 + kC_m^2)a_5}{(a_3 + 2kC_m^2)(a_4 + kC_m^2)} < 0{,}465; \\ u_4 = \frac{b_3b_6}{b_4b_5} = \frac{(a_3 + 2kC_m^2)a_6}{(a_4 + kC_m^2)a_5} < 0{,}465. \end{cases} \qquad (17)$$

Как следует из неравенств (17), область асимптотической устойчивости СУОС определяется как значениями коэффициентов характеристического уравнения (10), зависящими только от параметров закона управления $h_i, \alpha_i, (i = \overline{1,3})$, так и значениями компонент кинетического момента C_1, C_2, C_3, зависящими от начальных условий по угловой скорости вращения спутника.

Об условиях глобальной асимптотической устойчивости СУОС

Рассмотрим случай максимальной степени устойчивости усеченной системы (9), которому соответствует случай кратных действительных отрицательных корней ее характеристического уравнения (10). Воспользуемся стандартной переходной характеристикой [7], которая позволяет отделить требование получения заданного времени переходного процесса системы от требования получения желаемой формы последнего. При этом переходный процесс строится для нормированного характеристического уравнения, откладывая по оси абсцисс относительное время $\tau = \Omega_0 t$, где Ω_0 – среднегеометрический корень характеристического уравнения, определяющий быстродействие системы, и определяется время переходного процесса в относительном времени τ. После этого получение заданного времени переходного процесса в абсолютном времени t достигается путем определения соответствующего значения среднегеометрического корня характеристического уравнения Ω_0 из равенства $\tau = \Omega_0 t$. Поэтому дальнейшие рассуждения проведем для стандартных переходных характеристик, соответствующих нормированному характеристическому уравнению.

В случае кратных действительных отрицательных корней, s_i = -1, $(i = 1...6)$, нормированное характеристическое уравнение (10) усеченной «предельной» системы (9) имеет биномиальные коэффициенты

$$\begin{cases} a_0 = 1; a_1 = 6;\ a_2 = 15;\ a_3 = 20; \\ \quad a_4 = 15; a_5 = 6;\ a_6 = 1 \end{cases} \tag{18}$$

и из выражений (11) следует, что

$$\frac{h_i}{J_i} = 2;\quad \frac{\alpha_i}{2J_i} = 1,\quad (i = \overline{1{,}3}),$$

откуда

$$h_i = \alpha_i = 2J_i,\ (i = \overline{1{,}3}). \tag{19}$$

Соответствующие значения показателей устойчивости равны: $u_1 = u_4 = 0.222,\ u_2 = u_3 = 0.3$, т. е. достаточные условия устойчивости (14) для усеченной «предельной» системы (9) выполнены.

Покажем, что для предельного случая, когда C_m стремится к бесконечности, соответствующие им предельные значения показателей устойчивости $u_1,\ u_4,\ u_2,\ u_3$ удовлетворяют условиям (17). Действительно, с учетом (16) и (18) для коэффициентов характеристического полинома (12) «предельной» линейной системы (6) имеем:

$$\begin{cases} \qquad b_0 = 1; b_1 = 6;\ b_2 = 15 + kC_m^2; \\ b_3 = 20 + 2kC_m^2;\ b_4 = 15 + kC_m^2;\ b_5 = 6;\ b_6 = 1 \end{cases} \tag{20}$$

и значения показателей устойчивости будут равны

$$\begin{cases} u_1 = u_4 = \dfrac{20+2kC_m^2}{6(15+kC_m^2)}\ ; \\ u_2 = u_3 = \dfrac{6}{20+2kC_m^2}\ . \end{cases} \tag{21}$$

В предельном случае, когда граничные значения C_m области (8) стремятся к бесконечности, имеем

$$\begin{cases} \lim_{C_m\to\infty} u_1 = \lim_{C_m\to\infty} u_4 = 0{,}333\ ; \\ \lim_{C_m\to\infty} u_2 = \lim_{C_m\to\infty} u_3 = 0, \end{cases} \tag{22}$$

т. е. достаточные условия устойчивости (14) для линейной системы (6) в предельном случае также выполнены.

Более того, из анализа зависимости этих показателей устойчивости от граничных значений C_m области (8) следует, что $u_1 = u_4$ являются монотонно возрастающими, а $u_2 = u_3$ являются монотонно убывающими функциями C_m. В силу монотонности функций u_1, u_2, u_3, u_4, условия (17) выполнены для всех значений C_1, C_2, C_3 из области (8).

Таким образом, справедливо следующее утверждение: если вектор параметров закона управления $h_i, \alpha_i, (i = \overline{1{,}3})$ такой, что характеристический полином (10) усеченной линейной системы (9) имеет устойчивые кратные действительные отрицательные корни, то линейная система (6) глобально асимптотически устойчива при любых начальных условиях по угловой скорости вращения спутника.

Численный пример

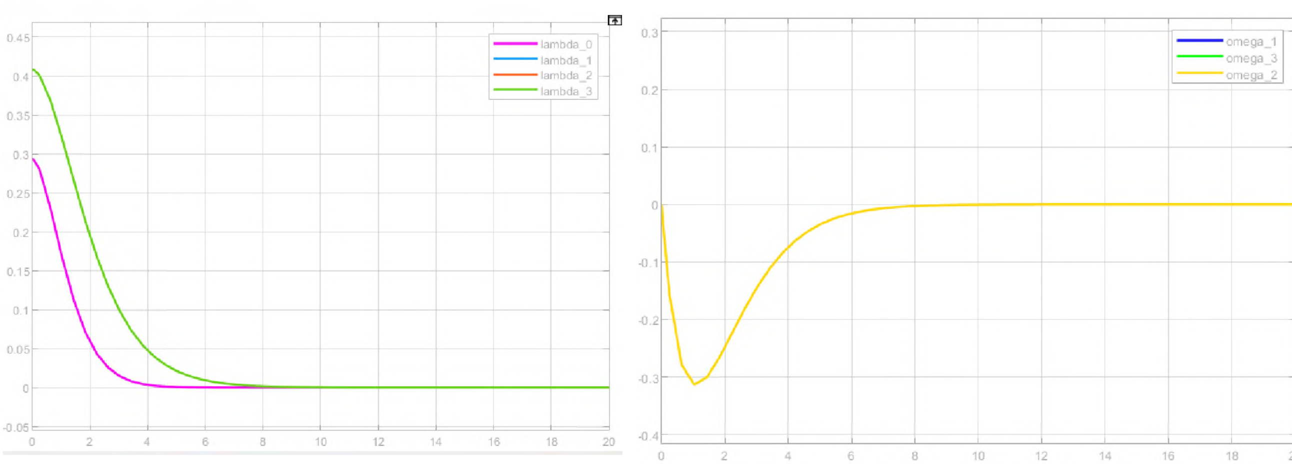
Моменты инерции спутника примем [5]: $J_1 = J_2 = 0.1521$*кгм*^{2}, $J_3 = 0{,}0375$*кгм*^{2}, моменты инерции маховиков: $J_{\text{м}i} = 0.01\,J_i,\ (i = \overline{1{,}3})$. Тогда для биномиальных коэффициентов характеристического уравнения (18) из выражений (19) получим $h_i = 2J_i$, $\alpha_i = 2J_i$, $(i = \overline{1,3})$. При этом коэффициенты b полинома (12) преобразуются к виду:

$$b_0 = 1; \quad b_1 = 6; \quad b_2 = 15 + \frac{C_1^2}{J_2J_3} + \frac{C_2^2}{J_1J_3} + \frac{C_3^2}{J_1J_2}; \quad b_3 = 20 + 2\left(\frac{C_1^2}{J_2J_3} + \frac{C_2^2}{J_1J_3} + \frac{C_3^2}{J_1J_2}\right);$$

$$b_4 = 15 + \frac{C_1^2}{J_2J_3} + \frac{C_2^2}{J_1J_3} + \frac{C_3^2}{J_1J_2}; \quad b_5 = 6; \quad b_6 = 1.$$

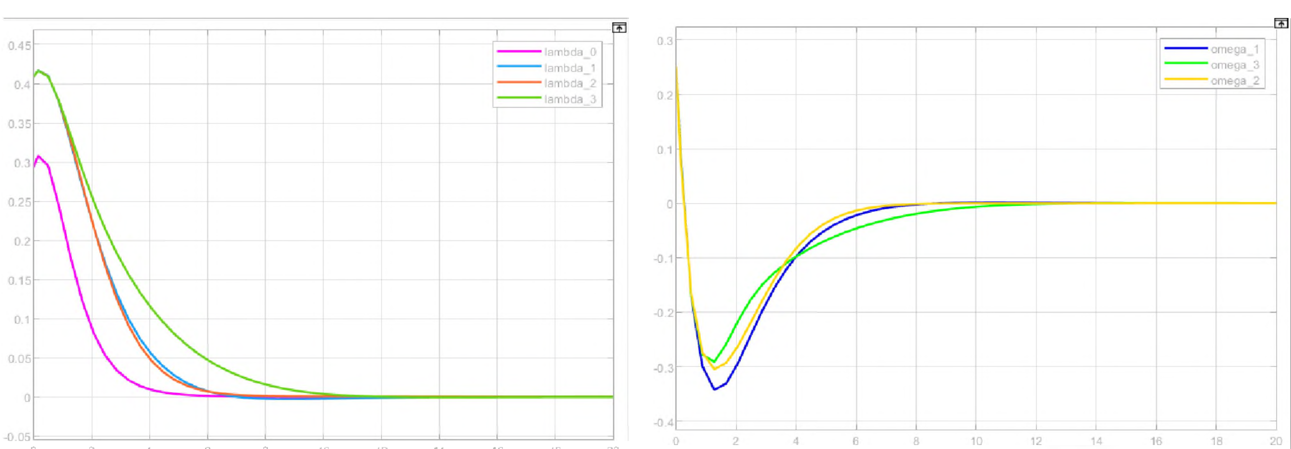
Рассмотрим четыре варианта начальных условий по угловым скоростям спутника для системы: $\omega_i(0) = 0;\ 0{,}25;\ 0.5;\ 0{,}75$ рад/сек $(i = \overline{1,3})$, начальные угловые скорости маховиков приняты равными нулю и начальные угловые положения спутника приняты равными: $\lambda_0^2 = \frac{1}{2};\ \lambda_1^2 = \frac{1}{6};\ \lambda_2^2 = \frac{1}{6};\ \lambda_3^2 = \frac{1}{6}$.

Результаты расчета переходных процессов приведены на рис.1-4.



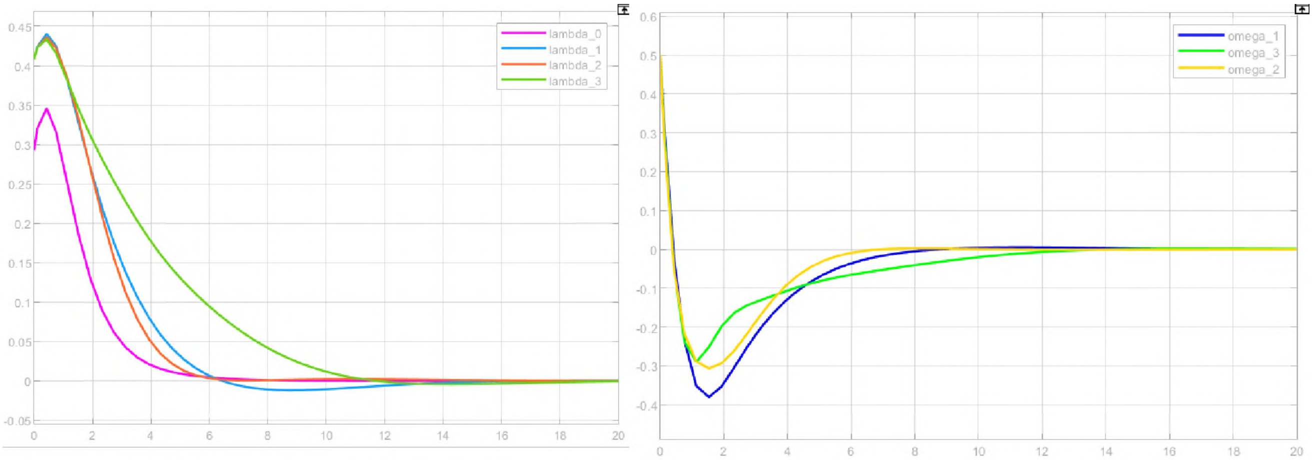
$\lambda_0^2 = \frac{1}{2};\ \lambda_1^2 = \frac{1}{6};\ \lambda_2^2 = \frac{1}{6};\ \lambda_3^2 = \frac{1}{6}$ $\qquad$ $\omega_i(0) = 0, (i = \overline{1,3})$

Рисунок 1



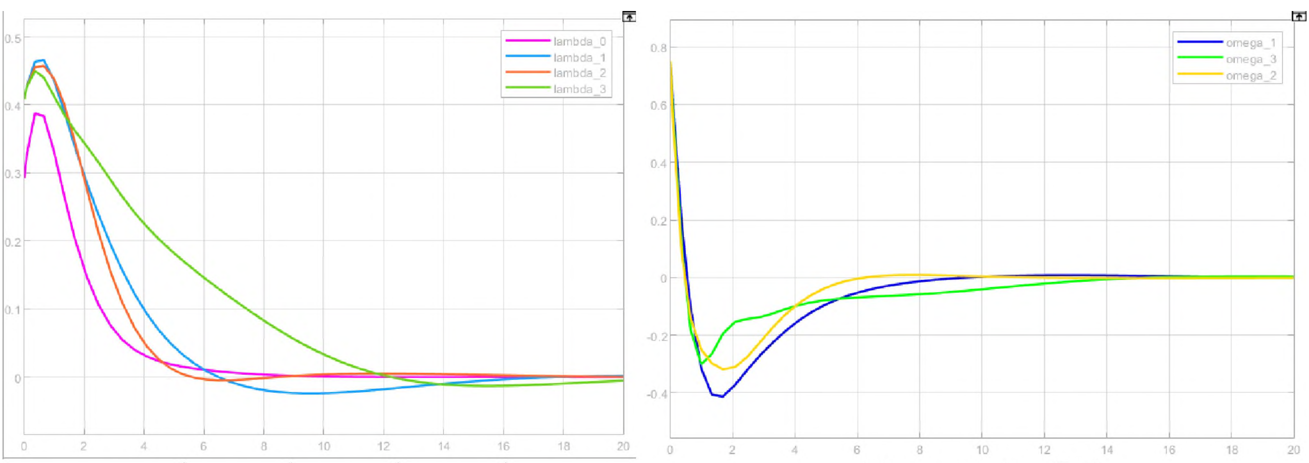
$\lambda_0^2 = \frac{1}{2};\ \lambda_1^2 = \frac{1}{6};\ \lambda_2^2 = \frac{1}{6};\ \lambda_3^2 = \frac{1}{6}$ $\qquad$ $\omega_i(0) = 0{,}25, (i = \overline{1,3})$

Рисунок 2



$\lambda_0^2 = \frac{1}{2};\ \lambda_1^2 = \frac{1}{6};\ \lambda_2^2 = \frac{1}{6};\ \lambda_3^2 = \frac{1}{6}$ $\omega_i(0) = 0{,}5, (i = \overline{1{,}3})$

Рисунок 3



$\lambda_0^2 = \frac{1}{2};\ \lambda_1^2 = \frac{1}{6};\ \lambda_2^2 = \frac{1}{6};\ \lambda_3^2 = \frac{1}{6}$ $\omega_i(0) = 0{,}75, (i = \overline{1{,}3})$

Рисунок 4

Как следует из анализа этих рисунков, СУОС асимптотически устойчива при всех четырех значениях начальной угловой скорости вращения спутника, при этом увеличение начальных угловых скоростей спутника приводит к увеличению времени переходного процесса.

Выводы

1. Показано, что при исследовании устойчивости СУОС необходимо учитывать начальные условия по угловой скорости вращения спутника, которые принимают заранее неизвестные значения из ограниченной замкнутой области трехмерного пространства.

2. Получены в аналитическом виде достаточные условия асимптотической устойчивости СУОС, которые выражены непосредственно через коэффициенты характеристического уравнения «предельной» линейной системы дифференциальных уравнений и не требуют вычисления корней этого уравнения.

3. Доказано, что если вектор параметров закона управления выбран из условия максимальной степени устойчивости усеченной «предельной» линейной системы дифференциальных уравнений, то СУОС глобально асимптотически устойчива при любых начальных условиях по угловым скоростям вращения спутника.

Благодарности

Данное исследование выполнено и финансируется Комитетом науки Министерства Науки и Высшего образования Республики Казахстан, проект №AP19677356 "Разработать систему

управления ориентацией наноспутников с маховиками в качестве исполнительных органов на основе методов линеаризации".

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Молдабеков М., Елубаев С., Алипбаев К., Сухенко А., Бопеев Т., Михайленко Д. Анализ устойчивости микроспутниковой системы ориентации // Прикладная механика и материалы. – 2015. – Т. 798. – С. 297-302.

2. Молдабеков М., Ахмедов Д., Елубаев С., Алипбаев К., Сухенко А. Оптимальный синтез параметров спутниковой системы ориентации // Успехи космонавтики. – 2017. – Т. 161. – С. 989-997. http://www.univelt.com/linkedfiles/v161%20Contents.pdf

3. Наркевич Я., Сохацкий М., Закржевски Б. Обобщенная модель спутниковой системы ориентации // Международный журнал аэрокосмической техники. Том 2020, ID статьи 5352019, 17 страниц. https://doi.org/10.1155/2020/5352019 .

4. А.Г.Ромеро, Л.К.Соуза. Система спутникового контроллера на основе реактивных колес с использованием зависимого от состояния уравнения Риккати (SDRE) на Java. C Springer Nature Switzerland AG 2019 IFToMM 2018.61, стр. 547-561, 2019. https://doi.org/10.1007/978-3-319-99268-6_38

5. Молдабеков М., Сухенко А., Шаповалова Д., Елубаев С. Использование линейной формы уравнений динамики спутниковой системы управления ориентацией для ее анализа и синтеза // Журнал теоретической и прикладной механики. 59, 1, 2020, с.109-120. DOI: 10.15632/jtam-pl/129071.

6. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. Москва, Наука, 1973. – 329 с.

7. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. Москва, Наука, 1972 – 768 с.

8. Соколов Н.И., Липатов А.В. О применении «приближенных» критериев устойчивости к синтезу адаптивных систем. Сб. «Информационные материалы», Москва, АН СССР, Научный совет по комплексной проблеме «Кибернетика», 1970, № 7(44).

9.Молдабеков М., Сухенко А., Оразалы Ю., Аден А. (2023). Динамический анализ нелинейной спутниковой системы ориентации с использованием точной линейной модели. Математика, 11(12), 2614. МДПИ АГ. Получено с http://dx.doi.org/10.3390/math11122614

10. Хамис А. и Зидек Д. (2019). Оптимальное нелинейное управление ориентацией космического аппарата по конечному горизонту. В «Журнале астронавтических наук» (том 67, выпуск 3, стр. 1002–1020). ООО «Спрингер Сайенс энд Бизнес Медиа» https://doi.org/10.1007/s40295-019-00189-w

11. Псьяки М.Л., 2001, Управление ориентацией магнитного крутящего момента с помощью асимптотического периодического линейного квадратичного регулирования, Журнал управления и динамики наведения, DOI: https://doi.org/10.2514/2.4723.

12. Гальвао Б.Б., Фаустино М.К.М., Л.К.Г. де Соуза, 2016, Проектирование спутниковой системы ориентации с нелинейной динамикой и кинематикой кватерниона с использованием реактивных колес, Материалы XXXVII Иберийского латиноамериканского конгресса по вычислительным методам в технике, DOI: https://doi.org/10.26512/ripe.v2i20.15007.

13. Дорук Р.О., 2009, Линеаризация в спутниковом управлении ориентацией с измененными параметрами Родригеса, Авиастроение и аэрокосмические технологии: международный журнал, 81/3, 199–203.

14. Росса Ф.Д., Деркол Ф., Ловера М., 2013, Анализ устойчивости ориентации космического аппарата с магнитным управлением, указывающего на Землю, тома трудов IFAC, 46 (19), 518-523.

15. Насролахи С.С., Абдоллахи Ф., 2016, Анализ устойчивости Ляпунова для нелинейного спутникового управления ориентацией при наличии погрешности измерения состояний, Материалы 4-й Международной конференции по управлению, контрольно-измерительным приборам и автоматике 2016 г., DOI: 10.1109/ICCIAutom.2016.7483137.

16. Баолинь У Сибинь Цао Чжэнсюэ Ли Многокритериальное управление выходной обратной связью для микроспутникового управления ориентацией: подход LMI.

LIST OF REFERENCES

1. Moldabekov M., Yelubayev S., Alipbayev K., Sukhenko A, Bopeyev T., Mikhailenko D. Stability analysis of the microsatellite attitude control system // Applied mechanics and materials. – 2015. – Vol. 798. – P. 297-302.

2. Moldabekov M., Akhmedov D., Yelubaev S., Alipbayev K., Sukhenko A. Optimal synthesis of satellite orientation system`s parameters // Advances in the astronautical science. – 2017. – Vol. 161. – P. 989-997. http://www.univelt.com/linkedfiles/v161%20Contents.pdf

3. Narkiewicz J., Sochacki M., Zakrzewski B. Generic Model of a Satellite Attitude Control System // International Journal of Aerospace Engineering. Volume 2020, Article ID 5352019, 17 pages. https://doi.org/10.1155/2020/5352019 .

4. A.G.Romero, L.C.Souza. Satellite Controller System Based on Reaction Wheels Using the State-Dependent Riccati Equation (SDRE) on Java. C Springer Nature Switzerland AG 2019 IFToMM 2018.61, pp. 547-561, 2019. https://doi.org/10.1007/978-3-319-99268-6_38

5. Moldabekov M., Sukhenko A., Shapovalova D., Yelubayev S. Using the linear form of equations of dynamics of satellite attitude control system for its analysis and synthesis // Journal of Theoretical and Applied Mechanics. 59, 1, 2020, pp.109-120. DOI: 10.15632/jtam-pl/129071.

6. Branets V.N., Shmyglevsky I.P. Application of quaternions in problems of orientation of a solid. Moscow, Nauka Publ., 1973. – 329 p.

7. Besekersky V.A., Popov E.P. Theory of automatic control systems. Moscow, Nauka Publ., 1972 – 768 p.

8. Sokolov N.I., Lipatov A.V. On the application of "approximate" criteria of resistance to the synthesis of adaptive systems. Sat. "Information Materials", Moscow, Academy of Sciences of the USSR, Scientific Council on the Complex Problem of "Cybernetics", 1970, No. 7 (44).

9.Moldabekov, M., Sukhenko, A., Orazaly, Y., & Aden, A. (2023). Dynamics Analysis of a Nonlinear Satellite Attitude Control System Using an Exact Linear Model. Mathematics, 11(12), 2614. MDPI AG. Retrieved from http://dx.doi.org/10.3390/math11122614

10.Khamis, A., & Zydek, D. (2019). Finite Horizon Optimal Nonlinear Spacecraft Attitude Control. In The Journal of the Astronautical Sciences (Vol. 67, Issue 3, pp. 1002–1020). Springer Science and Business Media LLC. https://doi.org/10.1007/s40295-019-00189-w

11. Psiaki M.L., 2001, Magnetic torquer attitude control via asymptotic periodic linear quadratic regulation, Journal of guidance control and dynamics, DOI: https://doi.org/10.2514/2.4723.

12. Galvao B.B., Faustino M.C.M., L.C.G. de Souza, 2016, Satellite attitude control system design with nonlinear dynamics and kinematics of quaternion using reaction wheels, Proceedings of the XXXVII Iberian Latin-American congress on computational methods in engineering, DOI: https://doi.org/10.26512/ripe.v2i20.15007.

13. Doruk R.O., 2009, Linearization in satellite attitude control with modified Rodriguez parameters, Aircraft engineering and aerospace technology: an international journal, 81/3, 199–203.

14. Rossa F.D., Dercole F., Lovera M., 2013, Attitude stability analysis for an Earth pointing, magnetically controlled spacecraft, IFAC Proceedings Volumes, 46 (19), 518-523.

15. Nasrolahi S.S., Abdollahi F., 2016, Lyapunov stability analysis for non-linear satellite attitude control in the presence of states measurement error, Proc. of 2016 4th International conference on control, instrumentation and automation, DOI: 10.1109/ICCIAutom.2016.7483137.

16. Baolin Wu Xibin Cao Zhengxue Li Multi-objective output-feedback control for microsatellite attitude control: An LMI approach.

ЖЕРСЕРІКТІҢ БАСТАПҚЫ БҰРЫШТЫҚ ЖЫЛДАМДЫҒЫНЫҢ ОНЫҢ БАҒДАРЫН БАСҚАРУ ЖҮЙЕСІНІҢ ТҰРАҚТЫЛЫҒЫНА ӘСЕРІ

М.М. Молдабеков[1], А.С. Сухенко[1], Е.Е. Оразалы[2], А.А. Аден[2*]

[1]Ғарыш техникасы және технологиялары институты, Алматы, Қазақстан

[2] Ғұмарбек Дәукеев атындағы Алматы энергетика және байланыс университеті, КЕАҚ, Алматы, Қазақстан

e-mail: m.moldabekov@mail.ru, a.sukhenko@istt.kz, y.orazaly@aues.kz, a.aden@aues.kz

Аңдатпа. *Мақалада кинематикасы кватерниондардағы теңдеулермен сипатталатын маховиктері бар жерсеріктік бағдарлауды басқару жүйесінің (SWAC) тұрақтылығына жерсеріктік бастапқы бұрыштық айналу жылдамдығының әсерін зерттеу нәтижелері берілген. Мәселені шешу үшін авторлар уақыт бойынша айнымалылары бар дифференциалдық теңдеулердің сызықтық жүйесі түрінде SSU динамикасының сызықтық емес теңдеулерін ұсынады. Тұрақты параметрлері бар дифференциалдық теңдеулердің "шекті" сызықтық жүйесінің сипаттамалық теңдеуінің коэффициенттері арқылы тікелей көрсетілген және осы теңдеудің түбірлерін есептеуді қажет етпейтін СУОС асимптотикалық тұрақтылығының жеткілікті шарттары алынды. Егер басқару заңының өлшемдері қысқартылған «шекті» сызықтық жүйе тұрақтылығының ең жоғары дәрежесі жағдайында таңдалса, онда СББЖ кез келген бастапқы жағдайларда жерсеріктің бұрыштық айналу жылдамдығына сәйкес кез-келген бастапқы жағдайда жаһандық асимптотикалық тұрақты екендігі дәлелденді.*

Түйін сөздер: *жерсеріктік, қарым-қатынасты басқару жүйесі, асимптотикалық тұрақтылық, бастапқы бұрыштық жылдамдық.*

INFLUENCE OF THE INITIAL ANGULAR VELOCITY OF A SATELLITE ON THE STABILITY OF ITS ORIENTATION CONTROL SYSTEM

M.M. Moldabekov[1], A.S. Suhenko[1], Ye. Ye. Orazaly[2], A.A. Aden[2*]

[1]Institute of Space Engineering and Technology, Almaty, Kazakhstan
[2] Non-profit JSC "Almaty University of Power Engineering and Telecommunications named after Gumarbek Daukeyev", Almaty, Kazakhstan

e-mail: m.moldabekov@mail.ru, a.sukhenko@istt.kz, y.orazaly@aues.kz, a.aden@aues.kz

Abstract. *The results of a study of the influence of the initial angular velocity of rotation of the satellite on the stability of the satellite attitude control system (SACS) with flywheels are presented in the article. The kinematics of this system is described by equations in quaternions. The representation of the nonlinear equations for the dynamics of the EMS obtained by the authors in the form of a linear system of differential equations with time-varying parameters was used to solve the problem. Sufficient conditions for the asymptotic stability of the EMS were obtained. They are expressed through the coefficients of the characteristic equation of the "limit" linear system of differential equations with constant parameters and do not require calculation of the roots of this equation. It has been proven that if the parameters of the control law are selected from the condition of the maximum degree of stability of the truncated "limit" linear system, then the control system is globally asymptotically stable for any initial conditions with respect to the angular velocities of rotation of the satellite.*

Key words: *satellite, attitude control system, asymptotic stability, initial angular velocity.*