

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН  
НЕКОММЕРЧЕСКОЕ АКЦИОНЕРНОЕ ОБЩЕСТВО  
«АЛМАТИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ЭНЕРГЕТИКИ И СВЯЗИ ИМЕНИ ГУМАРБЕКА  
ДАУКЕЕВА»

ISSN 2790-0886

# В Е С Т Н И К

## АЛМАТИНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ЭНЕРГЕТИКИ И СВЯЗИ

Учрежден в июне 2008 года

Тематическая направленность: энергетика и энергетическое машиностроение, информационные,  
телекоммуникационные и космические технологии

---

**2 (61)**

**2023**

Импакт-фактор - 0.095

Научно-технический журнал  
Выходит 4 раза в год

Алматы



## ИНФОРМАЦИОННЫЕ, ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫЕ И КОСМИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ

МРНТИ 89.25.35

[https://doi.org/10.51775/2790-0886\\_2023\\_61\\_2\\_92](https://doi.org/10.51775/2790-0886_2023_61_2_92)

### РАЗРАБОТКА МЕТОДА РАСЧЕТА ОПТИМАЛЬНОЙ ПРОГРАММНОЙ ТРАЕКТОРИИ РАКЕТЫ-НОСИТЕЛЯ

М.М. Молдабеков, С.А. Елубаев, А.С. Сухенко\*, Т.М. Бопеев

Национальный центр космических исследований и технологий, Алматы, Казахстан

E-mail: [m.moldabekov@mail.ru](mailto:m.moldabekov@mail.ru), [s.velubavev@gmail.com](mailto:s.velubavev@gmail.com), [anna.sukhenko@gmail.com](mailto:anna.sukhenko@gmail.com),  
[bopeev.t@gmail.com](mailto:bopeev.t@gmail.com)

**Аннотация.** В данной работе рассмотрена постановка задачи расчета программной траектории ракеты-носителя для вывода на орбиту, а именно оптимальной программы угла тангажа. Рассмотрен подход с учетом разделения активного участка траектории ракеты-носителя на отдельные подучастки, соответствующие определенным ограничениям на угол атаки и определенному программному значению угла тангажа: участок вертикального взлета, участок отклонения от вертикали, участок гравитационного разворота, безвоздушный участок. На безвоздушном участке полета ракеты-носителя для поиска оптимальной программы угла тангажа и соответствующей программной траектории полета ракеты-носителя получена краевая двухточечная задача. Для решения полученной задачи предложен подход на основе метода стрельбы, позволяющего сузить область поиска начальных условий путем применения оптимизационного метода. Проведена апробация предложенного подхода на контрольном примере. В частности, проведен расчет программной траектории для определенной модели ракеты-носителя согласно предложенному подходу и сравнение полученных данных с реальной траекторией ракеты-носителя, воспроизведенной в ходе запуска. Результаты сравнения позволили определить, что характер расчетной траектории соответствует характеру реальной траектории ракеты-носителя и обнаружить выполнение оптимизационного критерия на безвоздушном участке полета.

**Ключевые слова:** ракета-носитель, система управления, программная траектория, программное значение угла тангажа, двухточечная краевая задача.

#### Введение

Одна из основных задач системы управления ракеты-носителя (РН) состоит в формировании программ управления движением РН, исходя из условий достижения конечной цели управления, которая обычно представляет собой достижение конкретной точки траектории на текущем участке полета РН. Программами управления или программными траекториями называют математические зависимости, определяющие желаемый (требуемый) закон движения РН, при котором обеспечивается достижение поставленной цели управления. Программные траектории полета РН представляют собой программы разомкнутого управления.

Традиционные программы управления для выведения РН на орбиту были относительно простыми. Стандартная методика заключается в том, что система управления РН функционирует в режиме «разомкнутого управления» во время полета в атмосфере. Далее на основе команды система управления на безвоздушном участке переключается в режим управления «с замкнутым контуром». В режиме разомкнутого управления обычно использовались предварительно загруженные таблицы команд на изменение ориентации [1, 2].

Система управления, работающая в режиме замкнутого управления, основывается на уравнениях упрощенной динамики, которые обеспечивают полуаналитическое решение для оптимальных углов, например, тангажа или рыскания. Разделение полета на отдельные этапы было необходимо в первую очередь из-за ограничений производительности компьютера и памяти.

Введение аэродинамических сил в постановку задачи делает ее более сложной и требующей больших вычислительных ресурсов. Простых, хорошо понятных формул нет, и это затрудняло поиск

надежного решения полной задачи оптимизации от момента старта до момента выведения на орбиту в режиме реального времени. Однако по мере того, как мощность компьютеров увеличивалась, стали разрабатываться более сложные алгоритмы, способные повысить надежность и безопасность РН.

Брауном и др. [3] были выполнены исследования по расширению возможностей алгоритмов управления вывода на орбиту. В [3] для получения оптимальной программы управления использовалась линеаризованная модель аэродинамики. Кривые подгонки для коэффициентов подъемной силы и сопротивления, а также плотности атмосферы, давления и скорости звука использовались для уменьшения вычислительной нагрузки, связанной с аэродинамическим моделированием. Для решения полученной задачи оптимизации в виде двухточечной краевой задачи использовался традиционный метод стрельбы в сочетании со специальной процедурой определения начальных условий для сопряженных переменных, однако при этом не всегда достигалась сходимость.

Брэдт и др. [4] использовали формулировку задачи, подобную [3] и добавили штрафную функцию для поиска оптимальной программы управления. Крамер и др. [5] использовали принципы нелинейного программирования для решения задачи поиска оптимальной программы. Хэнсон и др. [6] разработали несколько вариантов алгоритмов для выведения РН на орбиту. Леунг [7] использует метод теории возмущений, а Calise и Melamed [8] использовали метод коллокации для решения двухточечной краевой задачи и продемонстрировали хорошую сходимость. В [9] Gath и Calise расширили предыдущую работу, добавив ограничения на подъемную силу и угол атаки, а также оптимизацию последовательностей пассивных и активных участков в процессе выведения.

В данной работе рассматривается задача разработки метода расчета программной траектории РН для всего участка полета. При этом мы будем говорить о программных траекториях, сформированных на Земле до полета РН.

## Описание метода расчета программной траектории РН

Пуск и полет РН осуществляется в направлении прицеливания, что соответствует тому, что программная траектория лежит в плоскости выведения. Тогда основным фактором, определяющим характер программной траектории РН, является программа изменения угла тангажа, и задача определения программы управления или программной траектории РН сводится к задаче определения программы управления углом тангажа [10].

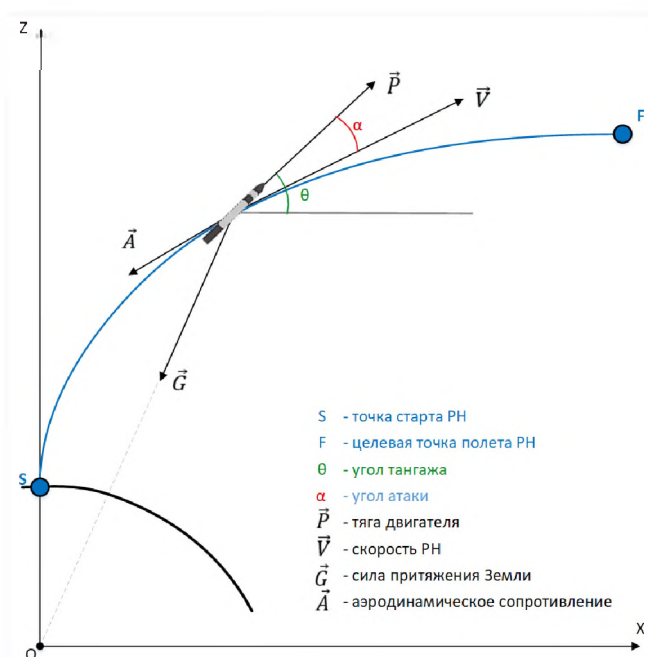


Рисунок 1 – Система координат

В связи с особенностями полета РН в воздушном и безвоздушном пространствах, программная траектория делится на несколько участков и каждому участку соответствует

собственная программа управления угла тангажа. В частности, на стартовом участке ракета стартует вертикально. Это соответствует случаю, когда программное значение угла тангажа равно 90 градусам, т.е.  $\theta_{пр} = 90^\circ$ . После вертикального взлета необходимо обеспечить наклон траектории в заданном направлении с помощью маневра отклонения от вертикали на заданный угол, что достигается при отрицательных углах атаки  $\alpha$ . Начиная со скорости 0.8 М, и далее на атмосферном участке траектории углы атаки должны быть по возможности близки к нулю. Это соответствует случаю, когда программное значение угла тангажа равно траекторному углу, т.е. при  $\alpha = 0$  из связи  $\theta_{пр} = \alpha + \Theta$  имеем  $\theta_{пр} = \Theta$ . Этот маневр соответствует гравитационному развороту РН. Перечисленные условия могут быть выполнены при соответствующих значениях угла атаки:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 \text{ при } M < M_1 = 0,05 \dots 0,15; \\ \alpha &= \bar{\alpha}K(K - 2) \text{ при } M \geq M_1; \\ K &= 2 \exp \beta(M_1 - M), \end{aligned} \tag{1}$$

где  $\bar{\alpha}$  - предельное значение угла атаки на дозвуковом участке траектории;  $\beta$  - постоянный коэффициент, который выбирается таким, чтобы при  $M = 0,6 \dots 0,8$  угол атаки становился практически равным нулю,  $M = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}/c$ .

Полет в безвоздушном пространстве снимает ограничения на углы атаки, что позволяет задавать оптимальные программы угла тангажа  $\theta_{пр} = \theta_{опт}$ .

### Постановка задачи построения программной траектории РН

Математическое описание движения РН обычно состоит в определении дифференциальных уравнений движения РН под действием определенных возмущающих сил и с соответствующими начальными условиями движения в зависимости от участка траектории. В частности, большая часть траектории, практически до момента окончания участка гравитационного разворота происходит в атмосфере, в этом случае при построении математической модели должны быть учтены аэродинамические и гравитационные силы.

Для описания движения РН используется начальная стартовая инерциальная система координат (ИСК) с началом координат в точке старта РН, где ось  $X_i$  направлена в направлении прицеливания, ось  $Z_i$  направлена по линии отвеса вверх, ось  $Y_i$  дополняет систему до правой (**Ошибка! Источник ссылки не найден.**). Тогда составляющие ускорения земного притяжения будут определяться соотношениями [10]:

$$\begin{aligned} G_x &= -\frac{\mu x}{\sqrt{(x^2 + z^2)^3}}, \\ G_z &= -\frac{\mu z}{\sqrt{(x^2 + z^2)^3}}, \end{aligned} \tag{2}$$

где  $\mu$  – гравитационный параметр.

Примем, что известен закон изменения массы РН [10]:

$$m(t) = m_0 - \int_{t_0}^T \beta(t) dt, \tag{3}$$

где  $m(t)$  – текущая масса РН,  $m_0$  – начальная масса РН,  $\beta$  – секундный расход топлива.

Запишем систему уравнений движения РН в начальной стартовой системе координат в виде:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V_x, \\ \dot{z} &= V_z, \\ \dot{V}_x &= \frac{W\beta}{m} \cos\theta + G_x + A_x, \\ \dot{V}_z &= \frac{W\beta}{m} \sin\theta + G_z + A_z, \\ \dot{m} &= -\beta, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $x, z$  – горизонтальная и вертикальная координаты РН;  $V_x, V_z$  – координаты скорости РН;  $\theta$  – угол тангажа РН;  $G_x, G_z$  – ускорения, обусловленные полем притяжения Земли,  $P = W\beta$  – сила тяги РН,  $A_x, A_z$  – аэродинамические ускорения.

Будем считать, что начальные условия движения РН на начальный момент времени  $t_0$  известны и заданы в виде:

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0, \quad z(t_0) = z_0, \quad V_x(t_0) = V_{x0}, \\ V_z(t_0) &= V_{z0}, \quad m(t_0) = m_0. \end{aligned} \quad (5)$$

В конце активного участка (при  $t = T$ ) на заданной высоте  $h_T$  угол наклона траектории (к местному горизонту) должен равняться нулю и соответственно угол между векторами скорости РН и радиус-вектором РН равен 90 градусам, что соответствует выражению  $x(T)V_x(T) + z(T)V_z(T) = 0$ . Отсюда имеем три терминальных условия с учетом заданной конечной массы РН:

$$\sqrt{x(T)^2 + z(T)^2} - R_E = h_T, \quad \frac{x(T)}{z(T)} = -\frac{V_z(T)}{V_x(T)}, \quad m(T) = m_T. \quad (6)$$

Для получения траектории РН на каждом из рассмотренных участков производится интегрирование уравнений движения (4) при соответствующих значениях программного угла тангажа.

Рассмотрим более подробно задачу определения оптимальной программы угла тангажа на безвоздушном участке полета. Будем искать такое управление  $u = (\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $\alpha_1 = \cos\theta, \alpha_2 = \sin\theta$ , которое обеспечивает максимальную величину конечной скорости:

$$V(T) = V_x^2(T) + V_z^2(T) \rightarrow \max. \quad (7)$$

при одновременном удовлетворении терминальных условий (6).

При этом область допустимых управлений зададим соотношениями только на углы атаки в виде:

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1. \quad (8)$$

Полученная постановка задачи позволяет определить оптимальную программу угла тангажа, применяя принцип максимума Понтрягина. В соответствии с принципом максимума Л. С. Понтрягина составим гамильтониан:

$$H = \lambda_1 V_x + \lambda_2 V_z + \lambda_3 G_x + \lambda_4 G_z + \beta \left( \frac{W}{m} (\lambda_3 \alpha_1 + \lambda_4 \alpha_2) - \lambda_5 \right). \quad (9)$$

Для определения оптимального управления необходимо, чтобы в любой момент времени гамильтониан достигал минимума на множестве допустимых управлений. Гамильтониан (9) достигает минимума при оптимальной ориентации вектора тяги, которая задается условиями:

$$\alpha_1 = -\frac{\lambda_3}{\sqrt{\lambda_3^2 + \lambda_4^2}}, \quad \alpha_2 = -\frac{\lambda_4}{\sqrt{\lambda_3^2 + \lambda_4^2}} \quad (10)$$

или

$$tg\theta = \frac{\lambda_4}{\lambda_3}. \quad (11)$$

Как видно из выражения для оптимальной программы изменения угла тангажа (11), она зависит от сопряженных переменных, которые необходимо определить. Для этого в соответствии с теорией оптимального управления [11] и принципом максимума Понтрягина получают уравнения для определения сопряженных переменных вида:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= \frac{-2\mu\lambda_3x^2 + \mu\lambda_3z^2 - 3\mu xz\lambda_4}{\sqrt{(x^2 + z^2)^5}}, \\ \dot{\lambda}_2 &= \frac{-2\mu\lambda_4z^2 + \mu\lambda_4x^2 - 3\mu xz\lambda_3}{\sqrt{(x^2 + z^2)^5}}, \\ \dot{\lambda}_3 &= -\lambda_1, \\ \dot{\lambda}_4 &= -\lambda_2, \\ \dot{\lambda}_5 &= -\frac{W_2\beta_2}{m^2} \sqrt{\lambda_3^2 + \lambda_4^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Дополним полученную систему концевыми условиями, используя уравнения трансверсальности [10]:

$$(\delta V - H\delta t + \vec{\lambda}\delta\vec{x})_{t=T} - (\delta V - H\delta t + \vec{\lambda}\delta\vec{x})_{t=0} = 0, \quad (13)$$

где  $\vec{\delta x}$  – вариация вектора состояния  $\vec{x} = [x, V_x, z, V_z, m]$ ,  $\vec{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4]$  – вектор сопряженных переменных.

В результате два условия на значения сопряженных переменных  $\lambda_2, \lambda_4$  на конечный момент времени  $T$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \lambda_3(T) &= \frac{\lambda_2(T)x(T)z^2(T)V_z(T)}{V_x^2(T)(x(T)^2 + z(T)^2)} - \frac{\lambda_1(T)z^3(T)V_z(T)}{V_x^2(T)(x(T)^2 + z(T)^2)} - 2V_x(T), \\ \lambda_4(T) &= \frac{\lambda_1(T)z^3(T)}{V_x(T)(x(T)^2 + z(T)^2)} - \frac{\lambda_2(T)x(T)z^2(T)}{V_x(T)(x(T)^2 + z(T)^2)} - 2V_z(T). \end{aligned} \quad (14)$$

Система уравнений движения (4) с начальными условиями (5) и граничными условиями (6), система сопряженных переменных (12) с концевыми условиями (14) представляют собой формулировку двухточечной краевой задачи для определения оптимальной программы угла тангажа  $\theta_{пр}$ ,  $\alpha_1 = \cos\theta_{пр}$ ,  $\alpha_2 = \sin\theta_{пр}$  на безвоздушном участке полета РН.

### Решение задачи построения программной траектории РН с применением основанного на методе стрельбы численного метода, позволяющего сузить область поиска начальных условий

Как видно из описания двухточечной краевой задачи для решения задачи оптимального построения программной траектории РН необходимо получить численное решение систем уравнений (4), (12) с начальными условиями (5) для достижения граничных условий (6), описывающих вывод РН на орбиту. При этом для системы уравнений сопряженных переменных (12) начальные условия неизвестны.

Для обеспечения возможности численного решения краевой задачи необходимо определить такие начальные значения сопряженных переменных  $\lambda_{10}, \lambda_{20}, \lambda_{30}, \lambda_{40}, \lambda_{50}$ , при которых обеспечивается выполнение граничных условий (6) в конечный момент времени. Данная постановка

задачи является классической постановкой задачи в методе стрельбы [12], который сводит двухточечную краевую задачу к задаче Коши, в которой производится варьирование начальных условий для сопряженных переменных  $\lambda_{10}, \lambda_{20}, \lambda_{30}, \lambda_{40}, \lambda_{50}$  для удовлетворения граничных условий.

Обычно на первом шаге метода стрельбы производится задание начальных условий  $\lambda_{10}, \lambda_{20}, \lambda_{30}, \lambda_{40}, \lambda_{50}$  произвольно, и далее производится интегрирование полученной задачи Коши одним из возможных численных методов. После чего полученное решение на конечный момент времени приравнивается к известным в задаче конечным значениям и используется для построения системы алгебраических уравнений для поиска начальных условий  $\lambda_{10}, \lambda_{20}, \lambda_{30}, \lambda_{40}, \lambda_{50}$ , обеспечивающих выполнение граничных условий. Для этого требуется несколько итераций и начальных заданий условий  $\lambda_{10}, \lambda_{20}, \lambda_{30}, \lambda_{40}, \lambda_{50}$  или так называемых «выстрелов». Есть модификации данного алгоритма, предполагающие улучшения в итерационной формуле для поиска наиболее подходящих начальных условий и сокращения количества итераций [13]. Также известны случаи применения нейросетей для определения наиболее подходящих начальных условий для сопряженных переменных [14], в то время как двухточечная краевая задача решается методом стрельбы.

В данной работе предлагается модификация алгоритма метода стрельбы, заключающаяся в том, что поиск начальных условий для сопряженных переменных может быть проведен с применением оптимизационных методик, где определение начальных условий для  $\lambda_{10}, \lambda_{20}, \lambda_{30}, \lambda_{40}, \lambda_{50}$  производится путем минимизации функционала, например, с использованием метода роя частиц.

В целом идея применения метода роя частиц к разработке оптимальной программной траектории РН не нова. В частности, в работе [15] метод роя частиц применен для решения задачи выбора оптимального угла атаки для достижения конечных условий. В работе [16] производится поиск оптимального траекторного угла для обеспечения выполнения конечных условий полета РН.

Метод роя частиц был предложен Д. Кеннеди и Р. Эберхарт для оптимизации непрерывных нелинейных функций типа  $J(X)$ , где  $X$  – вектор состояния системы [17]. В нашей задаче оптимизируемым функционалом является суперпозиция граничных условий задачи вывода РН на орбиту (6), т.е.:

$$J = \left[ h_T - \sqrt{x(T)^2 + z(T)^2} - R_E \right]^2 + k_1 [x(T)V_x(T) + z(T)V_z(T)]^2 + k_2 \left[ \frac{1}{V_x^2(T) + V_z^2(T)} \right]^2 \rightarrow \min, \quad (15)$$

где  $k_1, k_2$  – весовые коэффициенты.

Рассмотрим детальнее разработанный Д. Кеннеди и Р. Эберхарт алгоритм. Данный алгоритм моделирует многоагентную систему, где агенты-частицы двигаются к оптимальным решениям, обмениваясь при этом информацией с соседями.

Текущее состояние частицы характеризуется положением в пространстве решений (то есть, собственно, связанным с ними решением), а также вектором скорости перемещения. Оба этих параметра выбираются случайным образом на этапе инициализации.

Пусть рой создан из  $N$  частиц. Для нахождения наилучшего положения роя отводится некоторый отрезок дискретного времени, разбитый на  $K$  моментов. Пусть  $\vec{x}_i(t)$  – положение  $i$ -й частицы роя ( $i = 1..N$ ) в момент времени  $t$  ( $t = 1..K$ ). Скорость частицы  $\vec{V}_i(t)$ , представляет собой вектор, вдоль которого движется частица (рисунок 2).

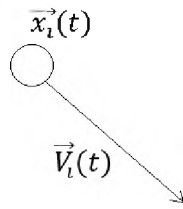


Рисунок 2 – Модель частицы

Кроме того, каждая частица хранит координаты лучшего из найденных ей решений  $\vec{P}_i(t)$ , а также лучшее из найденных всеми частицами решений  $\vec{g}(t)$  (рисунок 3).

Пространство движения частиц при этом ограничено  $x \in U$ ,  $U = \{R^D, b_l^j < x^j < b_u^j, j = 1, \dots, D\}$ , где  $D$  – количество параметров, которым можно характеризовать качество положения частицы роя (число параметров оптимизации).

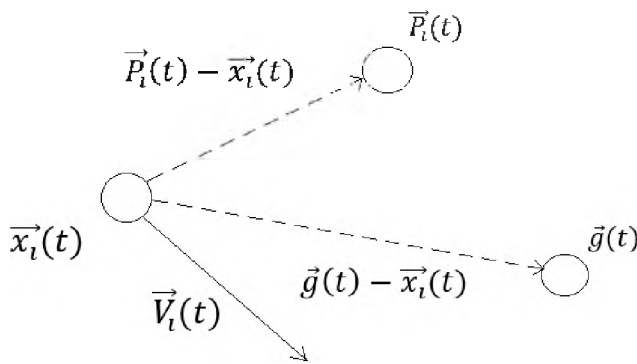


Рисунок 3 – Модель движущей частицы

Частица в поиске оптимального решения движется в направлении нового положения сначала параллельно вектору скорости  $\vec{V}_i(t)$ , далее в направлении вектора  $\vec{P}_i(t) - \vec{x}_i(t)$ , далее параллельно вектору  $\vec{g}(t) - \vec{x}_i(t)$  (рисунок 4). Новое положение частицы будет  $\vec{x}_i(t + 1)$ , новая скорость  $\vec{V}_i(t + 1)$ .

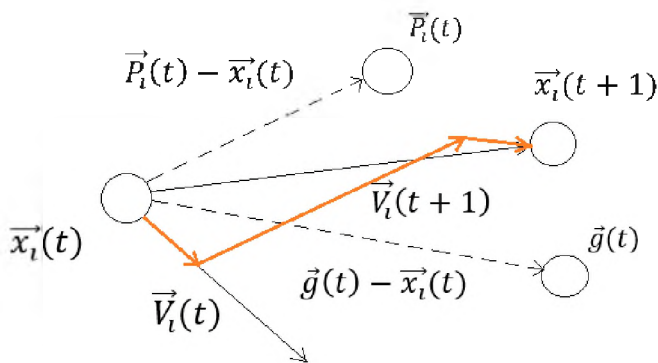


Рисунок 4 – Модель новой частицы

Таким образом, для поиска оптимального решения метод роя частиц инициализирует группу случайных частиц, а затем в ходе итерационного процесса находит оптимальное решение. Во время каждой итерации частица смещается в новую позицию, отслеживая два экстремальных значения: одно - оптимальное решение, найденное самой частицей. Это решение называется индивидуальным экстремальным значением  $\vec{P}_i(t)$ . Другой экстремум - это оптимальное решение, которое в настоящее время определила вся популяция частиц - глобальный экстремум  $\vec{g}(t)$ .



Движение частиц производится по следующим правилам. Обновление положения частицы производится в соответствии со следующим выражением [17]:

$$x_i(t + 1) = x_i(t) + V_i(t + 1). \quad (16)$$

Обновление скорости частицы производится в соответствии со следующим выражением:

$$V_i(t + 1) = wV_i(t) + C_1r_1(P_i(t) - x_i(t)) + C_2r_2(g(t) - x_i(t)), \quad (17)$$

где  $w, C_1, C_2$  – некоторые константы,  $r_1, r_2$  – константы, принимающие значения из интервала  $[0,1]$ .

Правая часть формулы (17) состоит из трех частей:

Первая часть - это часть «инерции», которая отражает привычки движения частиц и отражает стремление частиц сохранять свою прежнюю скорость.

Вторая часть - это часть «когнитивная», которая отражает память частиц об их собственном опыте и представляет тенденцию частиц приближаться к лучшему положению в их собственной истории.

Третья часть - это «социальная» часть, которая отражает исторический опыт группы в области сотрудничества и обмена знаниями между частицами и отражает тенденцию частиц приближаться к лучшей позиции в истории группы или области.

В начале поиска частицы активно перемещаются по допустимому пространству  $U$  за счет превалирования инерционной компоненты. При этом на нее практически не оказывают влияние сведения о лучшем положении, найденном соседями, тогда как собственное лучшее положение имеет некоторое значение. Фактически, поначалу частицы роя исследуют  $U$  практически независимо. Со временем они начинают все больше принимать во внимание полученный соседями результат, все меньше исследуя новые области в  $U$  и все больше изучая окрестности собственного и соседних лучших положений. Наконец, к концу времени поиска все частицы переходят к изучению окрестностей общего лучшего положения [18].

Далее будет приведен общий алгоритм метода роя частиц. На первом этапе задаются основные параметры алгоритма и начальные данные (таблица 1).

Таблица 1 - Основные параметры и начальные данные алгоритма метода роя частиц

Основные параметры	
Число оптимизируемых параметров	$N_{opt}$
Ограничения на величины параметров	$b_l, b_u$
Число частиц в рое	$N$
Число итераций поиска оптимальных решений	$M$
Размер окрестности, сведения о которой имеет частица	$N_{neigh}$
Число итераций, после которого увеличивается размер окрестности частицы	$M_{neigh}$
Максимальное число итераций	$M_{max}$
Точность	$E$
Коэффициенты	$w, C_1, C_2, r_1, r_2$
Начальные данные	
Начальные положения частиц	$x_i(1)$
Начальные скорости частиц	$V_i(1)$
Матрица лучших когда-либо найденных положений для каждой частицы $P_i(t)$	$M_p$
Матрица лучших когда-либо найденных положений для окрестности какой-либо частицы $g(t)$	$M_g$
Вектор лучших значений функционала, когда-либо найденных каждой частицей	$J^{best}$

Лучшее значение функционала, найденное всем роём	$J_g^{best}$
Лучшее значение функционала, найденное окрестностью некоторой частицы	$J_l^{best}$
Лучшее положение частицы, соответствующее $J_l^{best}$	$x^{best}$

При этом начальные положения частиц  $x_i(1)$  равномерно распределяются в  $U$ . Начальные скорости  $V_i(1)$  принимаются нулевыми. Матрицы  $M_p$  и  $M_g$  имеют размерность  $N_{opt} \times N$  и инициализируются начальными положениями  $x(1)$ . Элементы вектора  $J^{best}$  и значения функционалов  $J_g^{best}$ ,  $J_l^{best}$  принимаются заведомо большими.

Алгоритм метода роя частиц построен на базе открытых источников [18] и имеет вид, приведенный в виде псевдокода (рисунок 5).

```

for t = 1: M
  for i = 1: N
    Вычисление значения функционала J для текущей частицы x_i;
    Обновление значения J_g^{best} и соответствующего положения для i -й частицы:
    if J < J_g^{best}
      J_g^{best} = J
      P_i = x_i
    end if

    Увеличение окрестности частицы:
    if mod(t, M_{neigh}) = 0
      N_{neigh} = N_{neigh} + 1
    end if

    Сброс значений J_l^{best} и соответствующих положений в окрестности i -й частицы:
    g_i = x_i,
    J_l^{best} = J_i^{best}
    Обновление лучшего значения функционала, найденного в окрестности частицы:
    for j = (i - N_{neigh}): (i + N_{neigh})
      if J < J_l^{best}
        J_l^{best} = J
        x^{best} = x_i
      end if
    end for

    Определение скорости V_i(t + 1) = wV_i(t) + C_1r_1(P_i(t) - x_i(t)) + C_2r_2(g(t) - x_i(t));
    Обновление положения частицы x_i(t + 1) = x_i(t) + V_i(t + 1);
    Проверка на принадлежность решения области U.
  end for
  Проверка условий прекращения поиска (достигнута заданная точность E).
end for

```

Рисунок 5 - Алгоритм метода роя частиц

### Результаты решения задачи построения программной траектории РН

Для проверки корректности предложенной методики расчета требуемой программной траектории полета РН в качестве контрольного примера выбрана РН «Союз», основные характеристики которой приведены в таблице 2.

Таблица 2 – Основные характеристики РН «Союз» [19]

Характеристика	Значение
----------------	----------

Стартовая масса, кг	298990
Масса первой ступени, кг	173300
Масса второй ступени, кг	100240
Масса третьей ступени, кг	25450
Тяга первой ступени, Н	3530520
Время работы первой ступени, сек	118
Тяга второй ступени, Н	882630
Время работы второй ступени, сек	287
Тяга третьей ступени, Н	297936,66
Время работы третьей ступени, сек	240

Результаты расчета требуемой программной траектории полета РН «Союз» приведены на рисунках 6, 7 зеленой линией. Реальная траектория РН «Союз» из источника [19] приведена на рисунках 6, 7 синей линией.

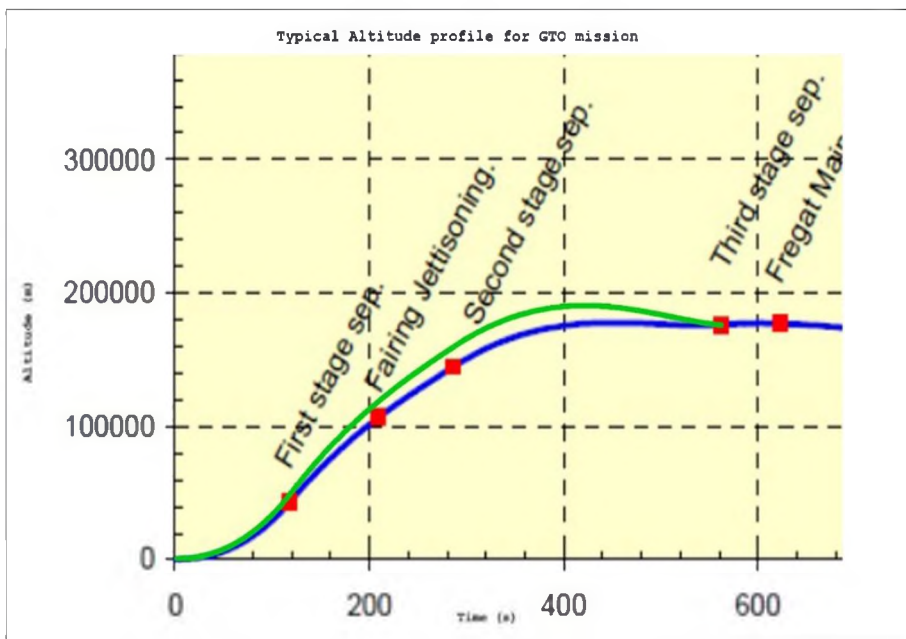
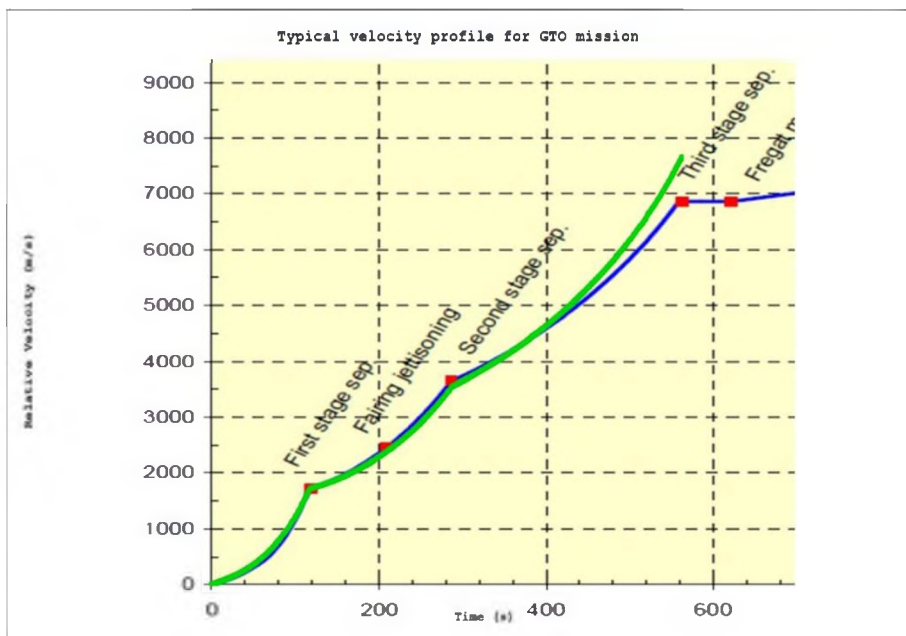


Рисунок 6 – Результаты расчета требуемой программной траектории РН. Высота РН



## Рисунок 7 – Результаты расчета требуемой программной траектории РН. Скорость РН

В качестве контрольных точек для сопоставления реальной траектории полета РН Союз с его расчетной программной траекторией были использованы следующие значения:

- время отделения первой ступени = 118 сек;
- высота отделения первой ступени = 48 км;
- скорость РН в момент отделения первой ступени = 1.8 км/с;
- время отделения второй ступени = 287 сек;
- высота отделения второй ступени = 139 км;
- скорость РН в момент отделения второй ступени = 3.8 км/с;
- время отделения третьей ступени = 527 сек;
- высота отделения третьей ступени = 179 км;
- скорость РН в момент отделения третьей ступени = 7.2 км/с.

Как видно из рисунков 6, 7 расчетная программная траектория РН в достаточной степени соответствуют ее реальной траектории движения. Кроме того, из рисунка 6 видно, что обеспечивается выполнение оптимизационного критерия на безвоздушном участке полета (7), соответствующего максимуму квадрата скорости РН.

### Выводы

В данной работе рассмотрена постановка задачи расчета программной траектории РН для вывода на орбиту. Пуск и полет РН осуществляется в направлении прицеливания, что соответствует тому, что программная траектория лежит в плоскости выведения, и основными факторами, определяющими характер программной траектории РН, являются программа изменения угла тангажа. Рассмотрен подход для расчета требуемой программы изменения угла тангажа с учетом разделения активного участка траектории РН на отдельные подучастки, соответствующие определенным ограничениям на угол атаки. До безвоздушного участка программная траектория РН и программное значение угла тангажа может быть получено путем численного интегрирования дифференциальных уравнений движения с соответствующими начальными условиями. На безвоздушном участке полета РН для получения программной траектории РН и программы угла тангажа решается краевая двухточечная задача. Для решения полученной краевой двухточечной задачи в данной статье предложен подход на основе метода стрельбы, позволяющий сузить область поиска начальных условий путем применения оптимизационного метода роя частиц. Проведение апробации предложенного подхода на контрольном примере расчета траектории РН позволило доказать обеспечение оптимизационного критерия на безвоздушном участке полета РН, а также наглядно показать соответствие расчетной программной траектории РН с реальной траекторией РН, заимствованной из открытого источника.

### Источники финансирования

Исследование в данной работе проведено в рамках программно-целевого финансирования Министерства цифрового развития, инноваций и аэрокосмической промышленности Казахстана (ИРН проекта BR109019/0221).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] McHenry R. L., Brand T. J., Long A. D., Cockrell B. F., Thibodeau J. R. III, Space Shuttle Ascent Guidance, Navigation, and Control, Journal of the Astronautical Sciences, 1979, Vol. 28, No. 1, pp. 1-38
- [2] Hanson J. M., Coughlin D. J., Dukeman G. A., Mulqueen J. A., McCarter J. W. Ascent, Transition, Entry, and Abort Guidance Algorithm Design for the X-33 Vehicle, 1998, AIAA Paper 98-4409, DOI:10.2514/6.1998-4409
- [3] Brown K. R., Harrold E.F., Johnhson G. W. Some New Results on Space Shuttle Atmospheric Ascent Optimization, 1970, AIAA Paper No. 70-978, <https://doi.org/10.2514/6.1970-978>
- [4] Bradt J. E., Jessich M. V., Hardtla J. W. Optimal Guidance for Future Space Applications, 1987, AIAA Paper 87- 2401, <https://doi.org/10.2514/6.1987-2401>
- [5] Cramer E. J., Bradt J. E., Hardtla J. W. Launch Flexibility Using NLP Guidance and Remote Wind Sensing, 1990, AIAA Paper 90-3330-CP, <https://doi.org/10.2514/6.1990-3330>

- [6] Hanson J., Shrader M., Cruzen C. Ascent Guidance Comparisons, *The Journal of the Astronautical Sciences*, 1995, Vol. 43, No. 3, pp. 307-326
- [7] Leung M. S. K., Calise A. J. A Hybrid Approach to NearOptimal Launch Vehicle Guidance, 1992, AIAA Paper 92-4304- CP, <https://doi.org/10.2514/3.21285>
- [8] Calise A. J., Melamed N., Lee Seungjae Design and Evaluation of a Three-Dimensional Optimal Ascent Guidance Algorithm, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1998, vol. 21, no. 6, pp. 867-875
- [9] Gath P., Calise A. Optimization of Launch Vehicle Ascent Trajectories With Path Constraints and Coast Arcs, 1999, AIAA Paper 99-4308, <https://doi.org/10.2514/2.4712>
- [10] Баллистика и наведение летательных аппаратов / Ю. Г. Сихарулидзе. - 3-е изд. - М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. – 408 с.
- [11] Longuski M.J., Guzman J.J., Prussing J.E. Optimal control with aerospace applications. - California: Microcosm Press El Segundo, 2014. - 286 p.
- [12] Keller H. B. Numerical Solution of Two Point Boundary Value Problems, *Proc. of CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*, Philadelphia, PA., 1976, pp. 1–19.
- [13] Stefan M. Filipov, Ivan D. Gospodinov, István Faragó Shooting-projection method for two-point boundary value problems, *Applied Mathematics Letters*, 2017, Vol. 72, pp. 10-15, <https://doi.org/10.1016/j.aml.2017.04.002>
- [14] Cheng L., Wang Z., Jiang F., Zhou C. Real-time optimal control for spacecraft orbit transfer via multiscale deep neural networks, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2019, Vol. 55, pp. 2436–2450, doi:10.1109/taes.2018.2889571
- [15] Dileepa M. V., Kamatha S., Nair V.G. Particle Swarm Optimization Applied to Ascent Phase Launch Vehicle Trajectory Optimization Problem, *Procedia Computer Science*, 2015, Vol. 54, pp. 516-522
- [16] da Silva Mota F.A., Hinckel J.N., Rocco E.M. Schlingloff H. Trajectory Optimization of Launch Vehicles Using Object-oriented Programming, *Journal of Aerospace Technology and Management*, 2018, Vol. 10, doi: 10.5028/jatm.v10.948
- [17] Kennedy J., Eberhart R. C. Particle swarm optimization, *Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks*, Perth, WA, Australia, 1995, pp. 1942–1948
- [18] PSO Algorithm. Available at: <https://www.mathworks.com/help/gads/particle-swarm-optimization-algorithm.html> (accessed 11 March 2023)
- [19] Soyuz-Users-Manual. Available at: <https://www.arianespace.com/wp-content/uploads/2015/09/Soyuz-Users-Manual-March-2012.pdf> (accessed 11 March 2023)

## LIST OF REFERENCES

- [12] McHenry R. L., Brand T. J., Long A. D., Cockrell B. F., Thibodeau J. R. III, Space Shuttle Ascent Guidance, Navigation, and Control, *Journal of the Astronautical Sciences*, 1979, Vol. 28, No. 1, pp. 1-38
- [13] Hanson J. M., Coughlin D. J., Dukeman G. A., Mulqueen J. A., McCarter J. W. Ascent, Transition, Entry, and Abort Guidance Algorithm Design for the X-33 Vehicle, 1998, AIAA Paper 98-4409, DOI:10.2514/6.1998-4409
- [14] Brown K. R., Harrold E.F., Johnhson G. W. Some New Results on Space Shuttle Atmospheric Ascent Optimization, 1970, AIAA Paper No. 70-978, <https://doi.org/10.2514/6.1970-978>
- [15] Bradt J. E., Jessich M. V., Hardtla J. W. Optimal Guidance for Future Space Applications, 1987, AIAA Paper 87- 2401, <https://doi.org/10.2514/6.1987-2401>
- [16] Cramer E. J., Bradt J. E., Hardtla J. W. Launch Flexibility Using NLP Guidance and Remote Wind Sensing, 1990, AIAA Paper 90-3330-CP, <https://doi.org/10.2514/6.1990-3330>
- [17] Hanson J., Shrader M., Cruzen C. Ascent Guidance Comparisons, *The Journal of the Astronautical Sciences*, 1995, Vol. 43, No. 3, pp. 307-326
- [18] Leung M. S. K., Calise A. J. A Hybrid Approach to NearOptimal Launch Vehicle Guidance, 1992, AIAA Paper 92-4304- CP, <https://doi.org/10.2514/3.21285>
- [19] Calise A. J., Melamed N., Lee Seungjae Design and Evaluation of a Three-Dimensional Optimal Ascent Guidance Algorithm, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1998, vol. 21, no. 6, pp. 867-875
- [20] Gath P., Calise A. Optimization of Launch Vehicle Ascent Trajectories With Path Constraints and Coast Arcs, 1999, AIAA Paper 99-4308, <https://doi.org/10.2514/2.4712>

- [10] Siharulidze Ju. G. Ballistika i navedenie letatel'nyh apparatov [Ballistics and guidance of aircraft], Moscow, BINOM Knowledge Laboratory, 2015
- [21] Longuski M.J., Guzman J.J., Prussing J.E. Optimal control with aerospace applications. - California: Microcosm Press El Segundo, 2014. - 286 p.
- [12] Keller H. B. Numerical Solution of Two Point Boundary Value Problems, Proc. of CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, Philadelphia, PA., 1976, pp. 1–19.
- [13] Stefan M. Filipov, Ivan D. Gospodinov, István Faragó Shooting-projection method for two-point boundary value problems, Applied Mathematics Letters, 2017, Vol. 72, pp. 10-15, <https://doi.org/10.1016/j.aml.2017.04.002>
- [14] Cheng L., Wang Z., Jiang F., Zhou C. Real-time optimal control for spacecraft orbit transfer via multiscale deep neural networks, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2019, Vol. 55, pp. 2436–2450, doi:10.1109/taes.2018.2889571
- [15] Dileepa M. V., Kamatha S., Nair V.G. Particle Swarm Optimization Applied to Ascent Phase Launch Vehicle Trajectory Optimization Problem, Procedia Computer Science, 2015, Vol. 54, pp. 516-522
- [16] da Silva Mota F.A., Hinckel J.N., Rocco E.M. Schlingloff H. Trajectory Optimization of Launch Vehicles Using Object-oriented Programming, Journal of Aerospace Technology and Management, 2018, Vol. 10, doi: 10.5028/jatm.v10.948
- [17] Kennedy J., Eberhart R. C. Particle swarm optimization, Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks, Perth, WA, Australia, 1995, pp. 1942–1948
- [18] PSO Algorithm. Available at: <https://www.mathworks.com/help/gads/particle-swarm-optimization-algorithm.html> (accessed 11 March 2023)
- [19] Soyuz-Users-Manual. Available at: <https://www.arianespace.com/wp-content/uploads/2015/09/Soyuz-Users-Manual-March-2012.pdf> (accessed 11 March 2023)

## ЗЫМЫРАН ТАСЫҒЫШТЫҢ ОҢТАЙЛЫ БАҒДАРЛАМАЛЫҚ ТРАЕКТОРИЯСЫН ЕСЕПТЕУ ӘДІСІН ӘЗІРЛЕУ

М.М. Молдабеков, С.А. Елубаев, А.С. Сухенко\*, Т.М. Бопеев

Ұлттық ғарыштық зерттеулер мен технологиялар орталығы, Алматы, Қазақстан

E-mail: [m.moldabekov@mail.ru](mailto:m.moldabekov@mail.ru), [s.velubavev@gmail.com](mailto:s.velubavev@gmail.com), [anna.sukhenko@gmail.com](mailto:anna.sukhenko@gmail.com),  
[bopeev.t@gmail.com](mailto:bopeev.t@gmail.com)

**Аңдатпа.** Бұл жұмыста орбитаға ұшыруға арналған зымыран тасығыштың бағдарламалық траекториясын атап айтқанда, қадам бұрышының оңтайлы бағдарламасын есептеу міндеті қарастырылған. Қозғалыс зымыран тасығыш траекториясының белсенді учаскесін шабуыл бұрышының белгілі бір шектеулеріне және қадам бұрышының белгілі бір бағдарламалық мәніне сәйкес келетін жеке қосалқы бөлімшелерге бөлуді ескере отырып қарастырылды: тік ұшып көтерілу бөлімі, тік ауытқу бөлімі, гравитациялық бұрылыс бөлімі, ауасыз бөлім. Зымыран тасығыштың ұшуының ауасыз учаскесінде оңтайлы көлбеу бұрышы бағдарламасын және зымыран тасығыштың ұшуының сәйкес бағдарламалық траекториясын іздеу үшін шекаралық екі нүктелік тапсырма алынады. Алынған мәселені шешу үшін оңтайландыру әдісін қолдану арқылы бастапқы шарттарды іздеу аймағын тарылтуға мүмкіндік беретін түсіру әдісіне негізделген тәсіл ұсынылады. Ұсынылған тәсіл бақылау мысалында тексерілді. Атап айтқанда, ұсынылған тәсілге сәйкес зымыран тасығыштың белгілі бір моделі үшін бағдарламалық траектория есептелді және алынған мәліметтер ұшыру кезінде қайталанған зымыран тасығыштың нақты траекториясымен салыстырылды. Салыстыру нәтижелері есептелген траектория сипатының зымыран тасығыштың нақты траекториясының сипатына сәйкес келетінін анықтауға және ауасыз ұшу сегментінде оңтайландыру критерийінің орындалуын анықтауға мүмкіндік берді.

**Түйін сөздер:** зымыран тасығыш, басқару жүйесі, бағдарлама траекториясы, бағдарламалық құрал қадамының бұрышы, шекаралық екі нүктелік есеп.

## DEVELOPMENT OF A METHOD FOR CALCULATION OF THE OPTIMAL PROGRAM TRAJECTORY OF THE LAUNCH ROCKET

M.M. Moldabekov, S.A. Yelubayev, A.S. Sukhenko\*, T.M. Bopeyev

National center of space research and technology, Almaty, Kazakhstan

E-mail: [m.moldabekov@mail.ru](mailto:m.moldabekov@mail.ru), [s.velubayev@gmail.com](mailto:s.velubayev@gmail.com), [anna.sukhenko@gmail.com](mailto:anna.sukhenko@gmail.com),  
[bopeyev.t@gmail.com](mailto:bopeyev.t@gmail.com)

**Abstract.** *In this paper, we consider the problem of formulating the program trajectory calculation for a launch vehicle, specifically, the optimal program for the pitch angle. We examine an approach that takes into account the division of the active section of the launch vehicle trajectory into separate subsections corresponding to certain restrictions on the angle of attack and a specific program value of the pitch angle: the vertical takeoff section, the vertical deviation section, the gravity turn section, and the airless section. For the airless segment of the flight we obtain a two-point boundary value problem to search for the optimal pitch angle program and the corresponding program flight trajectory. We propose an approach based on the shooting method to solve this problem, which enables narrowing the search area for initial conditions by applying an optimization method. We tested the proposed approach on a control example, where we calculated a program flight trajectory for a specific launch vehicle model according to the proposed approach and compared it with the actual launch vehicle trajectory. The results of the comparison allowed us to determine that the character of the calculated trajectory corresponds to the character of the real trajectory of the launch vehicle and detect the fulfillment of the optimization criterion in the airless flight segment.*

**Keywords:** *launch vehicle, control system, program flight trajectory, program pitch angle value, two-point boundary value problem.*