

1 2009
16 64 5 к

К.К. Истеков В.Н. Косов

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

Л 2009/16645 к

22,314,973

И - 891

**К.К. ИСТЕКОВ
В.Н. КОСОВ**

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

*Допущено Министерством образования и науки Республики Казахстан
в качестве учебника для студентов физических специальностей
педагогических университетов*

Алматы
Триумф "Т"
2007

[530.145:531](045.8)✓

ББК 22.134я73

И 89

Рекомендовано

Министерством образования и науки Республики Казахстан

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук, профессор Чечин Л.М.

Доктор физико-математических наук, профессор Буртебаев Н.Т.

Истеков К.К., Косов В.Н.

И 89

Квантовая механика:

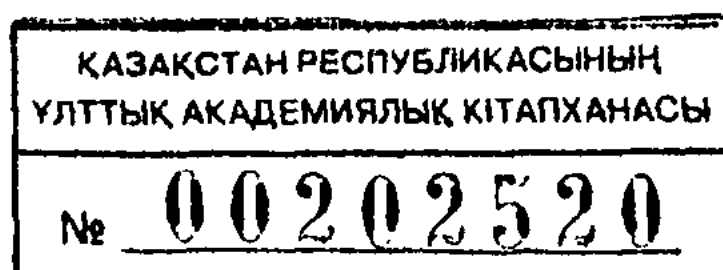
Учебник – Алматы: Триумф “Т”, 2007. - 296 с.

ISBN 978-601-7019-05-1

В книге рассмотрены физико-математические основы квантовой механики. Материал изложен в соответствии с программой курса теоретической физики для педагогических университетов.

Книга является учебником для студентов педагогических специальностей, изучающих теоретическую физику.

И 11604030000
00(05) – 07

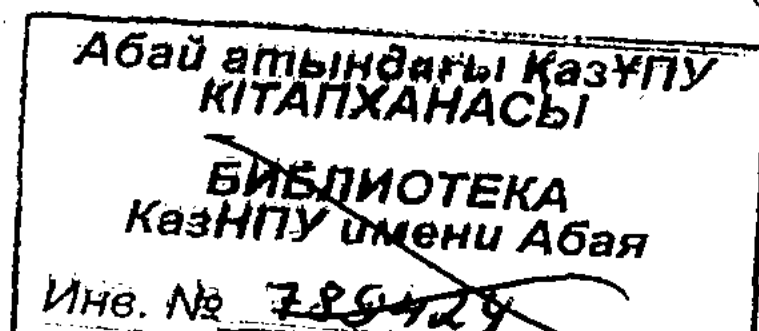


ББК 22.134я73

ISBN 978-601-7019-05-1

© Истеков К.К., Косов В.Н., 2007

© ТОО Триумф “Т”, 2007



ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга написана на базе лекций, читаемых на физико-математическом факультете Казахского национального педагогического университета им. Абая. Первая книга [1] была издана в 2005 году и содержала следующие три части курса: классическую механику, специальную теорию относительности и электродинамику. В данную книгу включена квантовая механика. Краткие конспекты лекций, задачи и упражнения по этим частям курса теоретической физики были изданы [2,3,4].

Как и в первой книге, чтобы трудности в проведении вычислений не затрудняли восприятие физических идей и основных положений все выкладки в курсе квантовой механики проведены в возможно полном объеме.

Для справочных целей в конце книги в приложении даны некоторые сведения о специальных функциях, об операторе орбитального момента в сферических координатах.

Книга имеет сквозную нумерацию параграфов. Нумерация формул дана отдельно по параграфам: числа в скобках обозначают номер параграфа и номер формулы в параграфе. При ссылке внутри параграфа указывается только номер формулы. Ссылки на формулы Приложения содержат буквенное обозначение приложения и номер формулы.

Предполагается, что чтение книги будет сопровождаться решением задач, которые могут быть взяты из известных книг. Например “Сборник задач по квантовой механике” В.И. Когана и В.М. Галицкого, “Сборник задач по квантовой механике” И.И. Гольдмана и В.Д. Кривченко, “Сборник задач по теоретической физике” Ф.Г. Серовой и А.А. Янкиной, “Сборник задач по теоретической физике” Л.Г. Гречко и др.

Авторы выражают глубокую благодарность и признательность доктору физ.-мат. наук, профессору Чечину Л.М. и доктору физ.-мат. наук, профессору Буртебаеву Н.Т., которые приняли на себя труд отрецензировать учебник и высказали свои предложения.

Авторы заранее благодарны за все пожелания, предложения и замечания, относящиеся к содержанию книги, которые читатель сочтет нужным нам сообщить.

Введение

Современная физика практически вся квантовая. Одним из достижений физики первой половины XX века было понимание масштабной зависимости законов физики. Оказалось, что в повседневной жизни квантовые законы проявляются в наиболее простом приближении, которые мы называем классической физикой. В полную силу квантовая физика проявляется в явлениях атомного масштаба, т.е. в явлениях, почти полностью лежащих за пределами непосредственного чувственного восприятия.

Однако, поскольку свойства макроскопических объектов определяются движением и взаимодействием частиц, из которых они состоят, постольку квантовые законы проявляются и в поведении макроскопических объектов.

Соответственно некоторые макроскопические явления могут быть поняты только в рамках квантовой физики. Это такие явления, как ферромагнетизм, сверхтекучесть, сверхпроводимость и т.д. Именно квантовая физика помогла понять природу таких астрофизических объектов, как белые карлики, нейтронные звезды, выяснить механизм протекания термоядерных реакций в звездах. Современное представление о возникновении и эволюции Вселенной получены на основе теории элементарных частиц.

Специфические квантовые законы уже нашли свое техническое воплощение. Это и атомные электростанции, и вся вычислительная техника, и квантовые генераторы излучения (лазеры). Это только начало и даже не полный список уже используемых технических решений.

Принципы и основные законы квантовой теории за 80 лет ее успешного развития окончательно сформулированы, так что в своей области применимости она является такой же законченной теорией, как и классическая механика. Она образует основу мировоззрения и специальных знаний не только современного ученого, но и инженера.

Данная книга ставит целью раскрытие основных теоретических представлений только начального раздела квантовой физики - нерелятивистской квантовой механики. Читатель должен отчетливо сознавать, что нерелятивистская квантовая механика, составляющая основу атомной физики, давно уже не является передним краем науки. Центр тяжести фундаментальных научных исследований перенесен на физику элементарных частиц высоких энергий, среди основных достижений которой можно назвать

объединение известных в природе взаимодействий.

Чтобы попытаться понять корни возникновения квантовой механики, надо вспомнить, каким представлялась материя и ее движение в классической физике и какие трудности встали перед ней.

В рамках классической физики механика претендует на универсальное описание движения материальных объектов. В механике положение частицы, если ее можно моделировать материальной точкой, задается тремя координатами. Если зависимость этих координат от времени известна, то это дает исчерпывающую информацию о движении частицы.

Но в природе существует и другой вид материи – поле-, которое не находит объяснения и описания в рамках классической механики. Описание поля значительно труднее, чем описание частицы. Впервые это выяснилось при изучении электромагнитных явлений, которые подчинялись законам, выраженным в уравнениях Максвелла.

Отметим, что именно электромагнитные явления показали, что взаимодействие распространяется с конечной скоростью. И это послужило основой релятивистского описания движения частиц при скоростях, близких к скорости распространения взаимодействия (скорости света).

Теперь нас интересуют другие особенности описания поля. Задать электромагнитное поле – это значит указать векторы поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ во всех точках пространства в данный момент времени, т.е. поле описывается бесконечным числом величин в каждый из моментов времени. В этом основное, с точки зрения описания, отличие полей от частиц.

Кроме того, электромагнитное поле распространяется в виде электромагнитных волн и может рождаться и поглощаться. Тогда как идея о рождении и уничтожении частиц органически чужда классической механике.

Электромагнитные волны могут накладываться, усиливаться или ослабевать, а иногда и полностью гасить друг друга (интерференция волн), чего не происходит при наложении потоков частиц.

Хотя частицы и поля связаны друг с другом, каждый из этих объектов выступает в классической физике как носитель принципиально различных индивидуальных черт, для описания которых нужны разные подходы – механика и электродинамика (теория поля). В этом и состоит двойственность физической картины мира в классической физике.

Но в природе достаточно давно обнаружены и явления, которые не укладывались даже в эти модели: ни в представления классической механики, ни в представления электродинамики. Перечислим те из них, которые известны читателям из курса атомной, ядерной физики и оптики.

В одну группу объединим явления, опять же связанные с электромагнитным взаимодействием. В природе электромагнитных волн были обнаружены корпускулярные свойства, свойства частиц. Об этом свидетельствуют, например,

фотоэффект,

комpton - эффект,

флуктуация интенсивностей слабых световых потоков.

Но более того, и в природе микроскопических (квантовых) частиц вещества обнаружились волновые свойства. Квантовые частицы оказались способны интерферировать и дифрагировать. Это получило название дуализма волновых и корпускулярных свойств квантовых частиц.

Электромагнитная волна и микроскопические частицы оказались не два взаимоисключающие понятия. Их нельзя противопоставлять, они ведут себя хотя и необычно, но одинаково необычно. Ничего этого не следует ни из классической механики, ни из электродинамики. Уже это свидетельствует о необходимости нового подхода к описанию микромира.

Кроме того, есть и другая группа явлений, которые не предсказываются и противоречат основам классической физики. Вот некоторые из них, ставшие у истоков квантовой физики:

- атомы — устойчивая система из ядра и электронов,
- энергетические уровни атомов дискретны,
- излучение атома квантовано,
- квантование момента импульса микроскопических объектов,
- наличие такой специфической характеристики микрообъекта, как спин,
- способность квантовых частиц проходить через потенциальный барьер,
- самопроизвольный (спонтанный) распад некоторых ядер атома, некоторых элементарных частиц,
- взаимопревращения элементарных частиц и т.д.

Список можно продолжать, особенно если включить современные экспериментальные данные. Каждый из перечисленных фактов, как и множество еще не упомянутых, может служить базой, на которой строится квантовая механика, может подсказать, что не описывается в рамках классической физики, можно ли вообще оперировать понятиями и строить описание в терминах классической механики.

Глава 1. Особенности поведения квантовых частиц

§ 1. Поведение классических и квантовых объектов в интерференционном эксперименте

Рассмотрим серию экспериментов, в которых проявляются не только парадоксы и странности микромира, но и содержатся подсказки, каким должно быть квантовое описание. Изложение построено на использовании материала из известных Фейнмановских лекций.

Опыт 1.

Пусть имеется источник макроскопических частиц, например, из него вылетают дробинки. Между источником и экраном поместим щит с двумя щелями. Будем подсчитывать число частиц N попавшие в разные места (точки) экрана за какой-то единичный отрезок времени. По сути N с точностью до нормировки является вероятностью попадания в данную точку экрана (плотностью относительной вероятности). Далее эту величину мы будем называть вероятностью.

Измерив вероятность попадания в разные точки экрана, получим распределение вероятности (Рис.1).

Что мы увидим?

1. Число частиц в каждой точке экрана увеличивается только на целое число, т.е. изменение числа частиц происходит дискретными порциями.
2. Одна частица в два места экрана попасть не может одновременно. Возможность деления частицы на части мы исключаем.
3. В разные места экрана попадают разное количество частиц.
4. Пусть открыты обе щели на пути частиц. Если нарисовать график числа попаданий в каждую точку некоторой прямой на экране, получим кривую N_{12} . Если закрыть щель 1, то график примет вид N_2 , если закрыть щель 2 – примет вид N_1 .

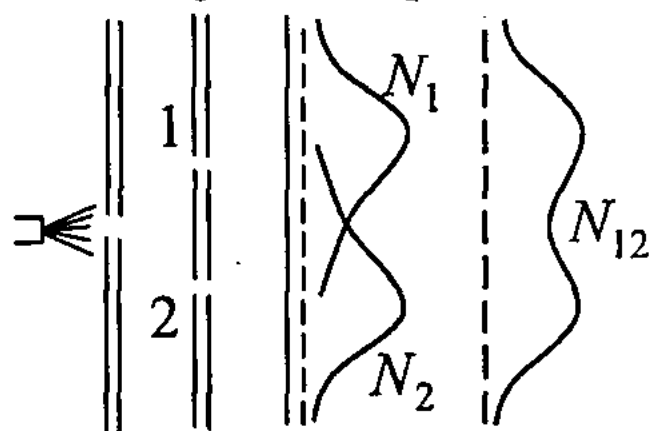


Рис. 1

5. Кривая

$$N_{12} = N_1 + N_2, \quad (1.1)$$

легко интерпретируется: число попаданий макроскопических частиц при двух открытых щелях есть простая сумма числа попаданий через одну щель 1 и через другую щель 2. Частица проходит или через щель 1 или через щель 2.

В таких случаях, говорят, что интерференция отсутствует.

Опыт 2.

Теперь имеется источник обычных волн, например, на воде (рис. 2). Есть преграда с двумя щелями. На некотором расстоянии от него имеется детектор, который может перемещаться в разных направлениях. Детектор обнаруживает степень волнения воды – энергию колебаний, т.е. интенсивность волнения I .

Что покажет такой опыт?

1. Колебания в данном месте могут быть любыми, они меняются не дискретно. При любом изменении интенсивности волн в источнике пропорционально будет изменяться и интенсивность волн за щелями.

2. Всегда можно найти хотя бы две точки пространства, куда волна приходит одновременно.

3. При закрытой щели 1 детектор зафиксирует интенсивность I_2 волн идущих от второй щели. А при закрытой щели 2 – интенсивность I_1 волн от первой щели. Интенсивность I_{12} при

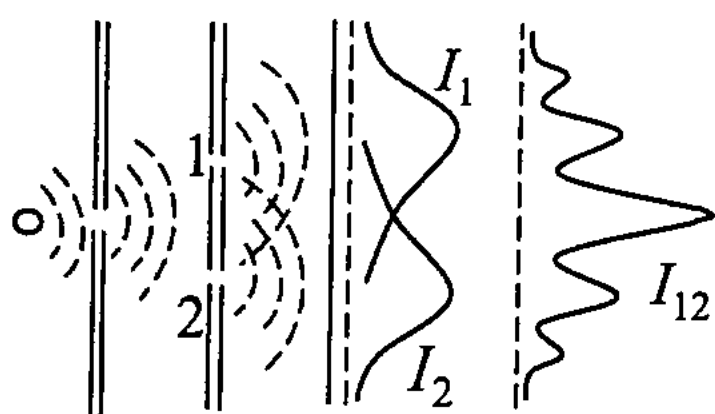


Рис. 2

двух открытых щелях имеет достаточно сложную форму. Главное в том, что I_{12} не получается в виде суммы I_1 и I_2 :

$$I_{12} \neq I_1 + I_2. \quad (1.2)$$

Это связано с интерференцией двух волн. Интерференция между двумя волнами приводит к тому, что интенсивность суммарной волны в одном месте больше чем $I_1 + I_2$, а в другом месте меньше чем $I_1 + I_2$.

Опыт 3.

Теперь проведем мысленный эксперимент с микроскопической частицей, например с электроном. Схема опыта приведена на рис. 3. Вообще можно взять любую другую элементарную частицу. Отличия будут только в источнике и способе регистрации.

Что мы регистрируем в этом опыте? Наш детектор реагирует на попадание электрона, т.е. мы можем сосчитать число электронов N попавших в то или иное место экрана за единицу времени. Опять, как и в опыте 1, регистрируем вероятность попадания N и распределение вероятности.

Какая картина предстанет перед нами сейчас?

1. Электроны в детектор попадают по одному, дискретно, порциями.
2. Электрон не делится на части и одновременно в две точки не попадает.
3. Пусть щель 1 на пути частиц закрыта. Распределение вероятности попадания электронов на экран через щель 2 имеет вид простой кривой N_2 .

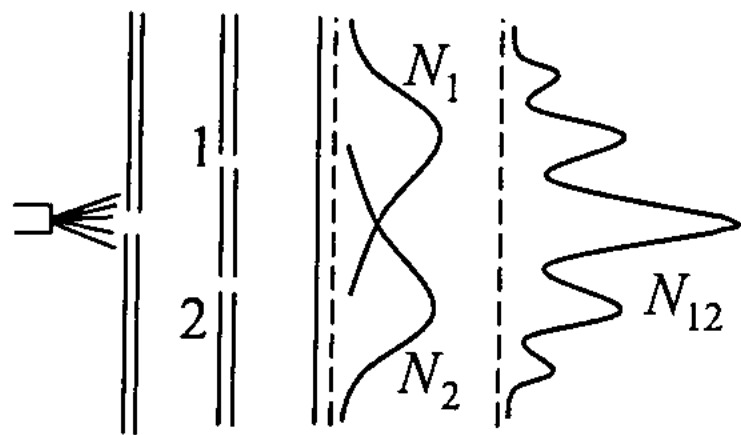


Рис. 3

Если теперь закрыть щель 2, то электроны, пролетевшие через щель 1, дадут кривую N_1 . Если же открыть обе щели, то кривая N_{12} имеет вид, как и в опыте с интерференцией волн и наблюдаем интерференционную картину:

$$N_{12} \neq N_1 + N_2, \quad (1.3)$$

Но это уже кривая вероятности, а не интенсивности.

Итак, наличие двух возможных путей прихода электрона от источника к детектору существенно влияет на распределение вероятности.

Странность полученной картины с точки зрения классической физики в следующем. С этой точки зрения, электрон, попавший в данную точку пространства при двух открытых щелях, пролетел или через первую щель, или через вторую щель. Но тогда общее число зарегистрированных в этой точке пространства электронов должно быть суммой числа электронов, пролетевших через первое отверстие, и числа электронов, пролетевших через второе отверстие. Но результат то оказался другим.

Опыт 4.

Представим себе, что мы взялись экспериментально проверить последнее рассуждение. Хотим знать - через какую щель пролетел данный электрон, попавший в данное место на экране, т.е. хотим знать траекторию электрона. При этом, возможно, что могут обнаружиться и какие-то другие объяснения наблюдаемой интерференции вероятности. Например, может быть, электрон временно распадается на две части, либо успевает пролететь каждую из щелей по нескольку раз в разных направлениях или что-нибудь другое в этом же духе.

Но как проследить за электроном? Продолжим наш мысленный эксперимент. Поместим за щелями мощный источник света. Электроны рассеивают свет и если свет достаточно сильный, то мы по рассеянному свету можем заметить электрон в какой-то из щели за какую-то долю секунды до момента регистрации электрона на экране (в детекторе). Повторим весь опыт 3 с включенной подсветкой. Чтобы мы увидим при этом?

Каждый раз перед щелчком нашего детектора мы видим вспышку света, отраженного от электрона только в одной из щелей: либо 1, либо 2. Никаких повторных или одновременных вспышек нет. Электрон во всех случаях, когда мы наблюдаем за ним (видим его) попадает в детектор (на экран) пролетев либо через щель 1, либо через щель 2.

Начнем считать вероятность попадания и заносить результаты в разные столбцы таблицы: в один столбец вносим электроны, прошедшие через щель 1, а в другой - электроны, прошедшие через щель 2. При открытой щели 1 заполнится первый столбец с N_1 , а при открытой второй щели - второй столбец с N_2 . Кривые N_1 и N_2 точно такие, как если бы мы не подсвечивали электроны.

Если же были открыты обе щели, то часть электронов N_{12}^1 окажется в

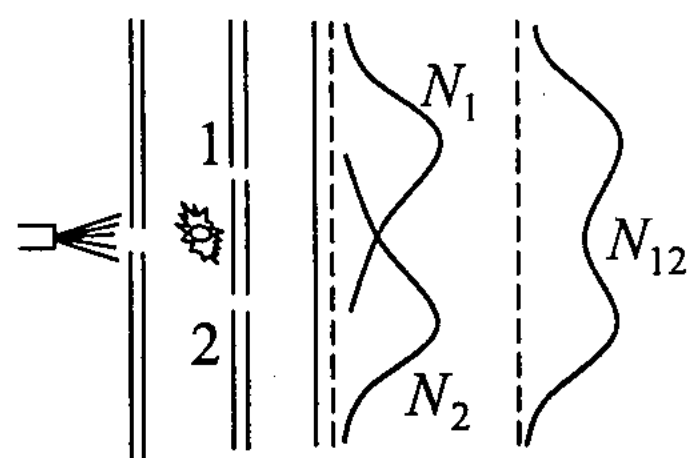


Рис. 4

первом столбце таблицы, часть N_{12}^2 - во втором столбце. Причем, N_{12}^1 и N_{12}^2 оказываются точно такими, как N_1 и N_2 . И, конечно же, получим

$$N_{12} = N_{12}^1 + N_{12}^2$$

и нет никакой интерференции!

Значит, в зависимости от того включен свет или нет, мы получили разный результат. Зажжем свет - и распределение будет описываться кривой

$$N_{12} = N_1 + N_2.$$

Выключим свет - и распределение сразу примет вид

$$N_{12} \neq N_1 + N_2.$$

Оказывается, что наблюдение (опыт) влияет на поведение, движение электрона (микрочастицы). Невозможно выяснить, через какую щель пролетает наш электрон и при этом не исказить картину распределения регистрируемых электронов, т.е. не нарушить интерференционную картину в распределении вероятности. Это невозможно принципиально.

Как только мы выяснили щель, через которую прошел электрон, т.е. уточнили траекторию, то получили сложение вероятностей, как и должно быть для классических частиц, движущихся по определенным траекториям. Электрон, отразив свет, проявил свое свойство частицы. Оказывается, что в этом случае он не может проявить свои волновые свойства.

Может секрет странного поведения электрона в том, что электроны, проходящие через две щели, как-то влияют друг на друга и получается интерференция, объяснимая как-то в рамках классической физики?

Можем повторить весь эксперимент. Только будем пускать электроны друг за другом с большим промежутком времени. Даже можно каждый последующий электрон выпускать только после того, как предыдущий уже попадет в детектор. В таком эксперименте не может быть и речи о влиянии этих электронов друг на друга. И что же? Результат не меняется.

Попробуем осмыслить приведенные выше наблюдения. В результате такого анализа выявим специфические особенности поведения микрообъекта, сформулируем некоторые принципы, которые подскажут, каким должна быть теория, описывающая механику микромира - квантовая механика, и которым должен удовлетворять математический аппарат квантовой механики.

Квантовую механику надо построить таким образом, чтобы она не противоречивым образом описала наши эксперименты.

§ 2. Корпускулярно-волновой дуализм

Первое, что бросается в глаза, это невозможность классической интерпретации самого микрообъекта, в данном случае электрона.

Речь идет вот о чем. По представлениям классической физики движение частицы и распространение волны – принципиально различные физические процессы.

Частицы – это отдельные фрагменты вещества, а волны – это коллективные процессы, в котором участвуют многие частицы. До тех пор, пока физика имеет дело с макроскопическими объектами, эти два понятия были взаимоисключающими. Такие явления как дифракция или интерференция присущи только волнам, являются отличительной чертой волн.

К понятиям молекула, атом, ядро, элементарные частицы и т.д., ко всему что мы и относим к микроскопическим объектам, мы приходим как к составным частям окружающих нас в природе макроскопических тел. По-

этому все микрообъекты ассоциируются с корпускулами, частицами. Большинство микрообъектов обладают такими атрибутами частиц как масса, заряд, конечные размеры. Но что мы видим в приведенных выше опытах с электроном?

Корпускулярным представлениям противоречат волновые. И главное здесь – это наблюдаемая интерференционная картина. Это и другие, о которых мы скажем позже, отличия в поведении квантовых частиц от классических частиц объясняют наличием у них волновых свойств.

Положение не обычное: приходится пользоваться двумя, казалось бы в корне противоречащими представлениями для объяснения явлений, относящихся к одной и той же частице. Микрочастица имеет двойственную природу, проявляющуюся в различных классических условиях либо в виде волн, либо в виде частиц. Это и есть корпускулярно-волновой дуализм квантовой частицы.

Но микроскопическая частица не является классической волной. Все что можно сказать – это наличие у них волновых свойств и то, что она не является ни корпускулой, ни волной.

Приходится признать, что это и не симбиоз корпускулы и волны. Например, можно пытаться наглядно смоделировать корпускулярно – волновой дуализм.

Одна из таких попыток связана с представлением микрообъекта, как волнового образования, ограниченного в пространстве и во времени. Это может быть волновой пакет или просто обрывок волны, называемый обычно волновым цугом. Все эти и другие модели оказались не состоятельны по принципиальным причинам. Мы не будем здесь доказывать, в чем именно заключается несостоятельность таких моделей.

В настоящее время установлено, что не только электрон, но и все тела в природе одновременно обладают и волновыми и корпускулярными свойствами. Единство волновых и корпускулярных свойств частиц и отражают известные формулы Планка

$$E = h\nu \quad (2.1)$$

и де Бройля

$$p = h/\lambda. \quad (2.2)$$

Энергия E и импульс p - характеристики частицы; частота ν и длина волны λ - признаки волнового процесса; $h = 6,62 \cdot 10^{-27}$ эрг·сек - постоянная Планка.

Каждая частица с энергией E и импульсом p является одновременно и волной с частотой ν и длиной волны λ .

Напомним, что квантовая механика началась с открытия Планком мельчайших частиц света: энергия световой волны не является безгранично делимой, она состоит из неделимых квантов, равных (1). Эйнштейн и де Бройль из этого соотношения вывели связь между импульсом p и длиной волны λ (2).

В (1) и (2) постоянная Планка играет разные роли: служит мерой дискретности и связывает воедино корпускулярные и волновые характеристики движения. Тот факт, что обе роли играет одна и та же постоянная, косвенно указывает на внутреннее единство этих явлений, на необходимость единого их описания.

§ 3. Вероятностный подход к описанию движения квантовой частицы. **Амплитуда вероятности.**

Если внимательно проследить за ходом опытов 3 и 4, то обнаружим, что нам не удастся предсказать поведение электронов. Во-первых, не можем заранее предсказать, у какого отверстия они появятся в очередной раз.

Во-вторых, даже если мы подсмотрим, через какую щель электрон пролетел, то все равно не сможем предсказать, в каком месте экрана он окажется. Его можно обнаружить в любом месте экрана в соответствии с распределением вероятности N_1 или N_2 .

В-третьих, можно на экране найти такое место, где при обеих открытых щелях практически электроны не наблюдаются. Хотя стоит нам закрыть одну из щелей, и детектор начнет регистрировать электроны. Казалось бы, мы позволили электронам прилетать в детектор через обе щели, а они вообще перестали прилетать или, по крайней мере, их стало меньше чем при одной открытой щели.

В-четвертых, все эти особенности не связаны с взаимным влиянием электронов. Они наблюдаются и в том случае, когда электроны следуют друг за другом через значительное время.

Все это свидетельствует о том, что поведение каждого электрона в отдельности – прохождение через ту или иную щель (через какую из них), попадание в детектор (в какое место пространства) - нельзя предсказать однозначно и имеет случайный характер.

Закономерности, проявляющиеся в случайных событиях количественно можно описать только вероятностью.

Причем в случае с микрочастицами понятие вероятности ее поведения несколько другое, чем, например, при попадании на экран дробинки. При полете дробинки случайность возникает оттого, что невозможно добиться идеального воспроизведения начального условия ее движения, или не можем учесть влияние среды, или не знаем ее строение, форму и т.п. В этом случае, нам не достает знания для точного предугадывания, только поэтому мы удовлетворяемся вычислением вероятности попадания в ту или иную точку экрана.

В опытах с электронами речь идет о другом. Здесь невозможно пользоваться любой информацией, полученной заранее, предсказать через какое отверстие пролетит электрон. И это не потому, что не хватает каких то подробностей. По-видимому, это неотъемлемое свойство природы. Получается, что можно воспроизвести все условия эксперимента, и все-таки не сможем точно предсказать, в каком из отверстий мы увидим электрон.

Причем вероятностное описание поведения электрона не вызвано и с тем, что их много. Мы говорим о вероятностном описании движения даже одного электрона. Необходимость вероятностного подхода к описанию каждой из квантовых частиц относится к любым процессам в микромире и является одной из важнейших отличительных особенностей квантовой теории.

Итак, для объяснения результатов интерференционного эксперимента с электроном необходимо описать вероятность попадания частицы в ту или иную точку пространства.

Однако основным понятием квантовой механики все же является не сама вероятность. Опыты 3 и 4 с электронами из §2 свидетельствуют, что вероятность попадания электрона в данный детектор через две щели существенно перераспределяется и не равна сумме вероятностей прихода электрона в детектор через первую и вторую щели. Происходит интерференционное явление, как и в случае прохождения волн через две щели (опыт 2).

Получается, что поведение одного электрона носит вероятностный характер, а большая совокупность актов прохождения электронов через отверстия дает результат, для объяснения которого следует приписать частице волновые свойства.

Но можно ли сказать, что интерферирует вероятность? Может ли по волновому закону меняться вероятность обнаружения частицы в том или ином месте пространства? Оказывается, нет.

Хотя бы потому, что вероятность по определению положительная величина. В таком случае, складывая положительные величины, мы не сможем получить эффект взаимного гашения вероятностей прихода электрона от двух щелей, т.е. не наблюдалось бы само явление интерференции.

Значит, по волновому закону должна меняться не сама вероятность. Это и имеется в виду, когда утверждается, что не сама вероятность является основной величиной, которой надо оперировать в квантовой механике. Для объяснения интерференции понятия вероятности уже недостаточно.

Представление о том, как согласовать волновые свойства и вероятностное поведение одиночного электрона, можно почерпнуть из сравнения результатов опыта 2 и 3.

Вспомним математическую сторону описания интенсивности классической волны и наблюдаемой интерференции в опытах, подобных 2. При распространении волны по волновому закону меняется высота (амплитуда) волны a . В местах впадин высота волны отрицательная, а в местах бугров — высота положительна по отношению к положению поверхности среды без волнения.

Пусть a_1 -высота волны, пришедшей в точку наблюдения от первой щели;

a_2 -высота волны, пришедшей в точку наблюдения от второй щели;

a_{12} -высота волны, образовавшейся в точке наблюдения при сложении двух пришедших волн.

Так вот высота результирующей волны a_{12} всегда равна сумме a_1 и a_2 :

$$a_{12} = a_1 + a_2.$$

Это классический принцип суперпозиции для волн.

Интенсивность волны I всегда пропорциональна квадрату высоты волны (поэтому высоту волны называют амплитудой интенсивности):

$$I_1 = (a_1)^2, \quad I_2 = (a_2)^2, \quad I_{12} = (a_{12})^2.$$

Именно из-за этого квадрата получается интерференционная кривая (1.2):

$$I_{12} = (a_{12})^2 = (a_1 + a_2)^2 = (a_1)^2 + (a_2)^2 + a_1 a_2 + a_2 a_1 \neq I_1 + I_2.$$

Обратимся к опыту 3. Напомним, что электроны в детектор попадали дискретными порциями, как и должно быть для частиц. Но вероятности попадания ведут себя как интенсивности волн, они интерферируют (1.3):

$$N_{12} \neq N_1 + N_2,$$

где N_1 - вероятность прихода электрона в детектор через первую щель;

N_2 - вероятность прихода электрона в детектор через вторую щель;

N_{12} - вероятность попадания электрона в детектор при двух открытых щелях.

Вопрос в том, как получить математическое описание этой интерференционной картины. Если вероятность N обнаружения частицы в данной точке наблюдения ведет себя как интенсивность волны I , то по аналогии с волной, мы можем положить, что эта вероятность определяется некой амплитудой – амплитудой вероятности или волновой функцией. Ее обозначим ψ . Это уже не высота, а совершенно новая величина, квадрат которой определяет вероятность

$$N = |\psi|^2. \quad (3.1)$$

Функция ψ может быть комплексной величиной.

Обозначим:

$$\psi_1 - \text{амплитуда вероятности } N_1, \quad \text{т.е.} \quad N_1 = |\psi_1|^2;$$

$$\psi_2 - \text{амплитуда вероятности } N_2, \quad \text{т.е.} \quad N_2 = |\psi_2|^2;$$

$$\psi_{12} - \text{амплитуда вероятности } N_{12}, \quad \text{т.е.} \quad N_{12} = |\psi_{12}|^2.$$

Для получения наблюдаемой на опыте интерференции вероятности теперь достаточно положить, что амплитуды вероятности просто складываются:

$$\psi_{12} = \psi_1 + \psi_2. \quad (3.2)$$

Это принцип суперпозиции для амплитуды вероятности. Тогда

$$N_{12} = |\psi_{12}|^2 = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + \psi_1 \psi_2 + \psi_2 \psi_1 \neq N_1 + N_2. \quad (3.3)$$

Наличие интерференционных членов

$$\psi_1 \psi_2 + \psi_2 \psi_1,$$

которые могут быть как положительными, так и отрицательными, позволяет описать экспериментально наблюдаемое гашение или усиление вероятности.

Волновым свойством должна обладать амплитуда вероятности каждой частицы в отдельности. Это и объясняет, почему интерференционная картина получается и тогда, когда электрон (например, в опытах 3 и 4) проходил через отверстия по одному. Волновые свойства частиц не связаны с коллективным поведением частиц.

Приведенное выше равенство (2) неявно отражает тот факт, что в наших опытах 3 и 4 установки симметричные. Это нашло свое отражение в равенстве коэффициентов при функциях ψ_1 и ψ_2 .

Если бы источник электронов был смещен к одной из щели, то будет доминировать амплитуда волны, пришедшая через эту щель. Тогда суперпозицию волновых функций ψ_1 и ψ_2 нужно будет брать с некоторыми коэффициентами (весами), так что в общем случае при двух открытых щелях будем иметь:

$$\psi_{12} = C_1\psi_1 + C_2\psi_2, \quad (3.4)$$

где C_1 и C_2 - некоторые числа.

Итак, применительно к рассмотренным нами опытам с электронами, принцип суперпозиции утверждает: если электрон в случае открытой только первой щели описывается волновой функцией ψ_1 , а в случае открытой только второй щели - волновой функцией ψ_2 , то в общем случае, когда обе щели открыты одновременно, волновая функция электрона будет определяться формулой (4).

Но если мы экспериментально выясним, в каком именно варианте произошло событие в данном случае, то вероятность события меняется: теперь это просто сумма вероятностей каждого из вариантов, т.е. интерференции нет. В этом случае, до измерения волновая функция частицы была (4) и с частицей мог произойти любой вариант событий. В процессе измерения произошел скачкообразный переход от ψ к любому из ψ_1 или ψ_2 .

Такая интерпретация волновой функции и результатов интерференционного эксперимента позволяет квантовой частице оставаться частицей и при этом описать его волновые свойства. Частица остается точечной, бесструктурной. Волновые свойства частицы интерпретируются с корпускулярной точки зрения. Это и отражает корпускулярно-волновой дуализм квантовой частицы.

Корпускулярные характеристики частицы (заряд, масса, энергия, импульс и т.д.) остались неделимыми, как и сами частицы, и обнаруживаются на опыте целиком с некоторой вероятностью. Волновые характеристики частицы - волновые функции способны разлагаться на части или складываться в соответствии с принципом суперпозиции.

Итак, наблюдаемую интерференцию вероятности попадания частицы на экран можно описать, если предположить что существует такая характеристика, как волновая функция $\psi(x, y, z, t)$, которая определяется так, что квадрат ее модуля $|\psi|^2 = \psi\psi^*$ равен вероятности найти частицу в оп-

ределенном месте пространства, т.е. плотность вероятности (ψ и ψ^* - величины комплексно-сопряженные). Для описания волновых свойств частиц волновая функция должна обладать свойством образовывать линейные комбинации (4), т.е. удовлетворять принципу суперпозиции.

§ 4. Принцип неопределенности

И так, поведение микрочастицы имеет вероятностный характер. Это означает, что по известному значению радиус-вектора $\vec{r}(t_0)$ в некоторый момент времени t_0 нельзя предсказать значение радиус-вектора в момент $t_0 + dt$. Значит, положение движущейся частицы мы не можем указать с помощью функции $\vec{r}(t)$ - радиус-вектора, используемого в механике классических объектов.

Ясно, что это несовместимо с понятием траектории частицы в классическом смысле. В таком случае мы приходим к выводу, что квантовая частица не имеет траекторию движения. Это обстоятельство составляет содержание одной из формулировок принципа неопределенности.

В принципе неопределенности заключен отказ от некоторых укоренившихся физических понятий, введенных в рамках классических представлений. Если отсутствует траектория в классическом понимании, то и отсутствует производная траектории, т.е. невозможно ввести понятие и определить точное значение скорости квантовой частицы в данной точке траектории.

Причем нельзя и экспериментально определить одновременно координату и скорость частицы. Предположим, что мы взялись измерить положение частицы в пространстве и по его изменению найти скорость. Координату прибора, в котором появляется частица, мы и возьмем за координату частицы. Будем производить последовательные измерения координат через определенное время и результаты измерения нанесем на график. Результаты не лягут на какую-либо плавную кривую, они будут иметь беспорядочный, скачкообразный ход. Результат должен быть таким, так как поведение, движение имеет вероятностный характер и у электрона нет траектории в классическом понимании.

Более или менее плавная траектория получится лишь тогда, когда координату частицы начнем измерять с грубой точностью. Если точность измерения оставить постоянной, но уменьшать интервал времени между измерениями, то соседние измерения дадут, конечно, близкие координаты. Но они, хотя и будут лежать в малом участке пространства, но в этом участке будут расположены совершенно беспорядочным образом.

Теперь для определения скорости (в классическом понимании) следует взять координаты, например, x_1 и x_2 , которые измерены в моменты времени t_1 и t_2 , найти изменение координаты $\Delta x = x_2 - x_1$ за время $\Delta t = t_2 - t_1$ и вычислить предел

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Но этот предел не будет иметь смысла, в силу указанной выше беспорядочности, хаотичности значений Δx на соседних участках.

Значит, попытка уточнить траекторию и определить точную координату приводит к полной неопределенности в скорости, а значит и в импульсе.

Опять же можно начать конструировать прибор, который бы легко менял свою скорость (импульс) при взаимодействии с микрочастицей. Тогда можно было бы этот импульс приписать частице и определить ее скорость. Но так как прибор пришел в движение, то, определив импульс и скорость, мы не сможем определить точное местоположение частицы, не сможем определить координату частицы в этот момент времени.

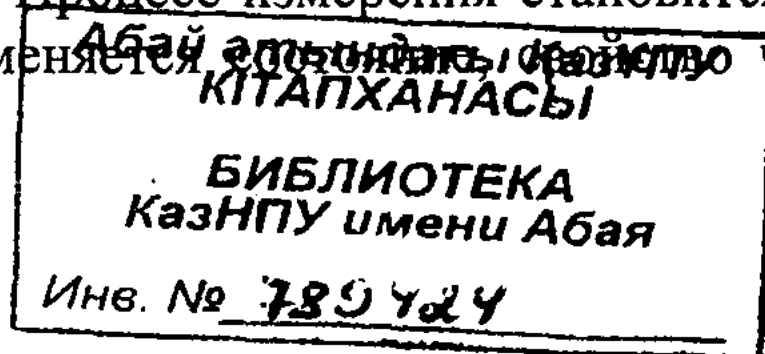
Таким образом, в микромире координата и скорость (импульс) частицы не могут быть одновременно точно определены, не существуют одновременно, не могут иметь одновременно определенные значения. Это утверждение также можно принять за содержание принципа неопределенности.

С учетом формулы де Бройля (2.2) из принципа неопределенности получим: нельзя одновременно и в то же время точно определить положение микрочастицы x и длину его волны λ . Значит, микрочастица не может проявить одновременно волновые и корпускулярные свойства. Это мы видели на опыте 4. Электрон, отразил свет, т.е. проявил свое свойство частицы. Но при этом исчезла интерференция и электрон не может проявить свои волновые свойства.

Опыт 4 обнаруживает и другую проблему, существующую в природе и особо остро проявляющуюся в микромире. Любые явления природы становятся объектом изучения, когда указан точный способ измерения свойств наблюдаемых явлений. Это предполагает наличие приборов. И процесс измерения сводится к взаимодействию прибора и объекта. При этом состояние прибора меняется. Характер и величина этого изменения зависят от свойств объекта и служат измеряемой характеристикой объекта.

И здесь самое время напомнить, что при взаимодействии с прибором меняется и состояние самого объекта, так что в результате измерения мы получаем о явлении сведения, которые искажены вмешательством прибора. В классической физике или предполагали, что измерение не влияет на сам объект, или предполагали, что эти влияния можно учесть и восстановить, определить истинное свойство объекта, не зависящее от измерения.

Но чем меньше объект, который мы исследуем, тем легче нарушить его состояние. Для изучения микромира надо бы взять и микроскопические приборы. Но ничего меньше квантовых объектов — атомов, электронов, ядер, фотонов и т.п. — мы в природе не знаем. В конце концов, мы вынуждены свойства микрообъектов измерять с помощью их самих. Прибор становится неотличим от объекта. Процесс измерения становится частью явления. В результате опыта изменяется состояние частиц, подвергшихся исследованию.



В опыте 4 мы видели, что, как только начинаем выяснять каким же из двух путей (через какую щель) пришел электрон в детектор, сразу исчезает интерференционная картина. Попытка наблюдения привело к исчезновению явления, которое мы бы получили, если бы не проводили промежуточное измерение.

Процесс измерения всегда оказывает воздействие на квантовый объект и это воздействие принципиально не может быть сделано сколь угодно слабым. И данное утверждение можно сформулировать как принцип неопределенности.

Для нашего эксперимента с электронами он звучит так. Нельзя сконструировать какой-либо прибор, при помощи которого можно было бы определить, через какое из отверстий пролетит электрон, не изменив при этом его движение настолько, что это разрушит интерференционную картину.

Из наших рассуждений следует, что координату и импульс микрочастицы нельзя измерить не только одновременно, но и с помощью одного и того же прибора. Ведь чтобы измерить импульс такой микроскопической частицы и при этом не очень сильно его изменить нужно взять легкий, подвижный детектор (прибор). Но подвижность прибора приводит к тому, что его положение регистрируется не точно, а значит и координата частицы не определена.

Этот пример иллюстрирует общее требование принципа неопределенности: нельзя в одном эксперименте определить обе характеристики квантового объекта - координату и импульс. Для этого необходимы два измерения, два прибора, свойства которых дополняют друг друга. Создавая благоприятные условия для измерения импульса, мы затрудняем нахождение координат, и наоборот.

Принцип неопределенности связан с корпускулярно-волновой природой частицы и вполне согласуется с вероятностным подходом к описанию частицы с использованием волновой функции.

Частица может находиться в любой точке пространства, в которой волновая функция отлична от нуля. Но чаще всего она будет в точках пространства, лежащих вблизи максимума вероятности, равной квадрату волновой функции. Значит, координата частицы может принять любое значение вблизи максимума вероятности. Это и свидетельствует, что существует разброс, неопределенность координаты частицы. Конечно же, любые измерения координаты частица могут дать любое значение в пределах этой неопределенности. То же самое можно сказать и об импульсе.

Глава 2. Описание состояния системы с помощью волновой функции.

§ 5. О невозможности применения классического подхода к описанию механики квантовой частицы

Любая измеримая на эксперименте характеристика физической системы является физической величиной. Свойства физической системы, физического объекта количественно описываются некоторой совокупностью физических величин. Если в физической системе не происходят процессы (события), то ни одна из физических величин не меняется.

Если в системе происходит какой-либо процесс, то меняются значения некоторых или всех физических величин. Такие физические величины называют динамическими величинами или динамическими переменными.

Причем, для изучения физического явления в системе, для изучения изменений происходящих в системе не обязательно следить одновременно за изменением всех динамических переменных.

В физике состояние системы описывается значениями динамических переменных, знание которых в данный момент времени позволяет предсказать значения всех динамических переменных системы в остальные моменты времени.

Принцип причинности устанавливает: знание каких динамических переменных достаточно для описания состояния.

Задача состоит в описании изменения состояния системы во времени. Уравнение, связывающее состояния системы в разные моменты времени называют уравнением движения.

Напомним, как описывалось механическое движение частицы в классической механике – механике Ньютона.

Свойства частицы в классической механике характеризуется совокупностью таких динамических переменных, как координата $\vec{r}$, скорость $\vec{v}$, импульс $\vec{p}$, кинетическая энергия T , полная механическая энергия E , момент импульса $\vec{L}$. Масса μ характеризует частицу, но она не является динамической переменной, а является параметром. Массу частицы обозначили μ , так как через m обозначают одно из квантовых чисел.

Классический принцип причинности постулирует, что, для описания состояния частицы в классической механике достаточно знать ее координату $\vec{r}(t_0)$ и скорость $\vec{v}(t_0)$ в некоторый момент времени t_0 .

Это означает, что по этим данным (начальным условиям) можно предсказать поведение классической частицы в будущем. Для этого надо знать уравнение движения классической частицы, например уравнение Ньютона:

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}. \quad (5.1)$$

Зная $\vec{r}(t_0)$ и $\vec{v}(t_0)$ в момент времени t_0 , можно решить это уравнение и найти однозначную зависимость координаты $\vec{r}(t)$ и скорости $\vec{v}(t)$ частицы от времени t , т.е. определить эволюцию системы под влиянием взаимодействия во все последующие моменты времени.

Причем, зная координату $\vec{r}$ и скорость $\vec{v}$ частицы, можно сосчитать все остальные динамические переменные в любой момент времени:

$$\vec{p} = \mu \vec{v}, \quad E = T + U(\vec{r}) = \frac{\mu v^2}{2} + U(\vec{r}) = \frac{p^2}{2\mu} + U(\vec{r}), \quad \vec{L} = [\vec{r}\vec{p}]. \quad (5.2)$$

Уравнение движения (1) позволяют получить и дифференциальные уравнения непосредственно для каждой динамической переменной

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad \frac{dT}{dt} = \vec{F}\vec{v}, \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = [\vec{r}\vec{F}], \quad (5.3)$$

Тогда используя начальные условия можно динамические переменные находить и как решения уравнений (3).

Сила $\vec{F}$, входящая в уравнения (1) и (3), связана с потенциальной энергией частицы во внешнем поле $U(\vec{r})$ стандартным соотношением

$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \quad (5.4)$$

и удовлетворяет принципу близкодействия.

В классической механике (в ньютоновской и релятивистской) считается, что описание состояния не дает повода для особых размышлений. Нет никаких принципиальных трудностей в определении координаты и скорости частицы в любой момент времени. Так же нет затруднений в определении других динамических переменных через координаты и скорости.

О поведении квантовой частицы известны следующие, доказанные в экспериментах, факты, отражающие фундаментальные свойства природы:

- нет траектории частицы, и не существуют одновременно точные значения координат и скорости частицы – принцип неопределенности;
- движение частицы имеет вероятностный характер;
- в движении частицы проявляются и корпускулярные, и волновые свойства частиц – корпускулярно-волновой дуализм частиц.

Теперь посмотрим, согласуется ли механика Ньютона с перечисленными свойствами квантовой частицы.

1. В соответствии с принципом неопределенности координата и скорость квантовой частицы не могут одновременно иметь определенные значения. Это означает, что состояние квантовой частицы не может быть задано значениями координат и импульса. Значит и принцип причинности не может быть сформулирован так, как в механике Ньютона.

2. Но если для квантовой частицы одновременно не известны точные значения $\vec{r}$ и $\vec{v}$, то мы не можем рассчитать значения динамических переменных $\vec{p}$, E , $\vec{L}$, необходимых для характеристики свойства квантовой частицы, ни по соотношениям (2), ни из уравнений (3).

3. В соответствии с тем же принципом неопределенности для квантовой частицы нет понятия траектории. В таком случае не имеют смысла, не могут быть вычислены производные от координат (радиус-вектора) по времени, не можем ввести понятия скорости $\frac{d\vec{r}}{dt}$ и ускорения $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$, входящие в уравнение (1). Это означает что сама запись уравнения (1) для квантовой частицы уже теряет смысл.

4. Отсутствие понятия траектории и, как следствие, понятия производной координаты по времени, не позволяют использовать классические определения динамических переменных (2) для квантовых частиц.

Формула для импульса $\vec{p} = \mu \frac{d\vec{r}}{dt}$ не имеет места, не может быть определением импульса квантовой частицы. В пример можно привести и значение момента импульса частицы $\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}]$.

Тоже самое и с определением полной механической энергии частицы во внешнем потенциальном поле равной сумме кинетической и потенциальной:

$$E = \frac{p^2}{2\mu} + U(\vec{r}).$$

И эта формула не может быть перенесена в квантовую механику и не может быть применена для квантовой частицы. Входящие в нее импульс $\vec{p}$ и координата $\vec{r}$ не имеют одновременно точных значений, а значит, по этой формуле мы просто не сможем сосчитать значение энергии, как суммы потенциальной и кинетической энергий.

Как тогда характеризовать скорость изменения подобных физических величин? Значит, не применимы и уравнения (3).

5. Если положение частицы в пространстве не определено точно, то и классическое понятие силы, действующей на частицу, теряет смысл, так как нет определенной точки приложения силы.

6. Тот факт, что частица может проявить как корпускулярные, так и волновые свойства означает, что поведение частицы нельзя описать ни классической механикой, ни классической волновой теорией.

7. Эксперименты показали, что движение квантовой частицы имеет вероятностный характер. В частности, мы должны уметь определять вероятность попадания частицы в ту или иную точку пространства. В уравнениях классической механики не содержится и предпосылок для описания такого вероятностного поведения отдельной частицы.

Вывод не утешительный. Все это свидетельствует, что уравнения классической механики по своей сути не могут использоваться для описания квантовых частиц. Этих уравнений просто нет в микромире.

Когда мы говорим о некорректности применения классического подхода к квантовым частицам, то не упоминали о тех неудачах, которые потерпела классическая механика при попытке описания свойства атомов и дру-

гих явлений, связанных с квантовыми частицами. Исторически все это и воспринималось как сигнал о необходимости новой механики.

Теперь то мы знаем, что нет даже возможности написать уравнения классической механики для квантовых частиц. Потеряли смысл входящие в уравнения величины. Потеряла смысл классическая формулировка принципа причинности, лежащая в основе этих уравнений. Это и делает бессмысленным попытку использования уравнений классической механики для расчетов в микромире.

Итак, классическая механика, ее уравнения не применимы в микромире потому что в микромире нельзя пользоваться:

- классическим понятием состояния, классическим принципом причинности;
- классическими определениями динамических переменных.

Известные свойства квантовых частиц здесь мы использовали для отрицания имеющейся модели механики – классической механики. Мы узнали, каким не может быть квантовая механика. Далее эти же сведения привлечем для того, чтобы узнать каким должна быть квантовая механика.

Разберемся с состоянием и принципом причинности в квантовой механике, а затем введем и динамические переменные.

§ 6. Волновая функция квантовой системы и ее свойства

В начале выводы и принципы, полученные из интерференционных экспериментов с квантовыми частицами, обобщим и распространим на произвольную квантовую систему.

Конечно же, свойства квантовой частицы обнаруженные в интерференционном эксперименте скажутся и на свойствах системы квантовых частиц. Если каждая частица обладает и волновыми, и корпускулярными свойствами, то и в поведении системы квантовых частиц мы обнаружим как волновые, так и корпускулярные черты.

Если поведение каждой частицы в отдельности имеет вероятностный характер, значит, и поведение системы квантовых частиц будет носить вероятностный характер. Для квантовой системы нельзя однозначно предсказать будущее входящих в систему частиц, а значит и поведение всей системы. Такие предсказания должны носить вероятностный характер.

Для описания подобных особенностей в поведении отдельной квантовой частицы было введено понятие амплитуды вероятности или волновой функции $\psi(x, y, z, t)$, удовлетворяющей принципу суперпозиции.

Волновая функция позволяет вычислить плотность вероятности обнаружения частицы в момент времени t в точке с координатами (x, y, z) :

$$|\psi|^2 = \psi\psi^*.$$

Это дает возможность указать, хотя и вероятностно, положение квантовой частицы в пространстве. Роль классической траектории квантовой частицы играет пространственное распределение плотности вероятности.

Тем самым мы получили возможность описать корпускулярные свойства квантовой частицы.

Способность волновой функции к суперпозиции позволяет учесть волновые свойства квантовой частицы, ее способность интерферировать.

Квантовая механика полагает, что введенное таким способом понятие волновой функции для частицы можно обобщить и использовать для описания состояния любого квантового объекта.

Для удобства, совокупность независимых переменных, необходимых для описания квантовой системы, обозначим одной буквой:

$$q = \{q_n\} = \{q_1, q_2, q_3, \dots, q_n\}, \quad (6.1)$$

где n - число степеней свободы.

Например, если речь идет об одной частице, то независимыми переменными могут быть декартовы координаты x, y, z : т.е. $q = \{x, y, z\}$. Если же имеем систему частиц, то q являются координатами всех частиц.

В качестве независимых переменных могут быть выбраны и другие величины, например импульсы, или координаты и спин т.п.

Для наглядности удобно представить все $q = \{q_1, q_2, q_3, \dots, q_n\}$ координатами в воображаемом n -мерном пространстве, называемом конфигурационным пространством. Тогда совокупность n значений независимых переменных в этом конфигурационном пространстве будет изображаться точкой.

Элемент объема в конфигурационном пространстве системы будет произведением дифференциалов

$$dq = dq_1 dq_2 \dots dq_n.$$

Для одной частицы независимые переменные являются координатами в обычном пространстве $q = \{x, y, z\}$ и dq совпадает с элементом объема

$$dq = dV = dx dy dz.$$

Теперь квантовая теория постулирует принцип причинности в следующем виде (*Постулат №1*):

Состояние любой квантовой системы полностью описывается такой функцией только независимых переменных $\psi(q, t)$, что

$$|\psi(q, t)|^2 \quad (6.2)$$

есть плотность вероятности обнаружить систему в точке конфигурационного пространства с координатами равными q в момент времени t .

Функция $\psi(q, t)$ называется амплитудой вероятности или волновой функцией состояния системы.

Волновая функция позволяет находить вероятность локализации системы в конфигурационном пространстве, находить вероятности тех или иных значений независимых переменных системы. Значит, введенная таким образом волновая функция будет описывать корпускулярные свойства квантовой системы.